

# Klausurenkurs Algebra

## **Aufgabe 1** (Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 3)

Für den Ring  $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  betrachten wir Einheiten im Polynomring  $A[t]$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $p(t) = 1 + 5t$  keine Einheit in  $A[t]$  ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $q(t) = 1 + 6t$  eine Einheit in  $A[t]$  ist.

## **Aufgabe 2** (Frühjahr 2009, Thema 1, Aufgabe 4)

Man gebe ein normiertes, quadratisches und irreduzibles Polynom  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  an, so dass  $f(x+d)$  für keine Wahl von  $d \in \mathbb{Z}$  ein Eisensteinpolynom ist.

## **Aufgabe 3** (Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 3)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins,  $I \subset R$  ein Ideal, das nur nilpotente Elemente enthält, und  $\pi : R \rightarrow R/I$  sei die kanonische Projektion. Zeigen Sie:  
Ist  $x \in R$  ein Element, so dass  $\pi(x)$  eine Einheit in  $R/I$  ist, dann ist  $x$  eine Einheit in  $R$ .

## **Aufgabe 4** (Frühjahr 2009, Thema 2, Aufgabe 4)

Betrachten Sie den Körper  $K := \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \sqrt{7})$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  für  $\alpha = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt{7}$ .
- (b) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung  $\mathbb{Q} \subset K$ .
- (c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von  $\alpha$  über  $\mathbb{Q}$ .

## **Aufgabe 5** (Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 1)

- (a) Wieviele Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow S_5$  gibt es?

(b) Sei  $f(X)$  das Polynom

$$f(X) = (X + 1)^5 - 6(X + 1)^3 + 2X + 8 \in \mathbb{Z}[X].$$

Wieviele Ringhomomorphismen  $\mathbb{Q}[X]/(f) \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es?

Die Antworten sind zu begründen.

**Aufgabe 6** (Frühjahr 2009, Thema 3, Aufgabe 4)

(a) Berechnen Sie das Minimalpolynom von  $\zeta_{15} = e^{\frac{2\pi i}{15}}$  über  $\mathbb{Q}$ .

(b) Seien  $M$  der Zerfällungskörper von  $X^{15} - 10$  über  $\mathbb{Q}$  und  $G$  die Automorphismengruppe von  $M$  über  $\mathbb{Q}$ . Bestimmen Sie die Gruppe  $G$  und zeigen Sie, dass  $G$  nicht isomorph zur symmetrischen Gruppe  $S_5$  ist.