Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Übungsblatt 1

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 **(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 1)**

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Für jede natürliche Zahl n ist $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ ganzzahlig durch 13 teilbar.

(b) Sind m und n je Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen, so ist auch ihr Produkt mn Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen.

(c) Sind m und n je Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen, so ist auch ihr Produkt mn Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen.

(Beachten Sie, dass auch 0 Quadrat einer ganzen Zahl ist.)

Aufgabe 2 **(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 2)**

Zeigen Sie, dass für eine endliche Gruppe $G \neq \{e\}$ folgende beiden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist zyklisch von Primzahlordnung.

(b) G besitzt genau eine maximale Untergruppe.

Aufgabe 3 **(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 3)**

Sei R ein Integritätsring, und M bezeichne die Vereinigung aller maximalen Ideale in R. Zeigen Sie, dass für die Einheitengruppe R^* von R gilt:

$$R^* = R \setminus M$$

Aufgabe 4 **(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 4)**

Beweisen oder widerlegen Sie:

Sind $L|K$ und $M|L$ Galoiserweiterungen, beide vom Grade 2, und ist $M|K$ galoissch, so ist die Galoisgruppe von $M|K$ isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 5 **(Herbst 2007, Thema 1, Aufgabe 5)**

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Beweisen Sie:

(a) $f(X) | f(X^2 - 2)$.

(b) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ ist galoissch..

(c) Die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ ist zyklisch von der Ordnung 3.