Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Detlef Dürr
Dr. D. Yarotskiy

Übungen zur Vorlesung
Statistische Mechanik

Blatt 5

Aufgabe 1.: Das Curie-Weiss Modell für Magnetismus ist ein unrealistisches Mean-Field-Modell (jeder Spin fühlt das gleiche gemeinsame konstante mittlere Feld aller anderen Spins). Die Energie ist

$$U(\sigma) = -\frac{J}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$

für $\sigma \in \Omega_N = \{-1, 1\}^N$, $J > 0$ und $h \in \mathbb{R}$, ein äußeres Magnetfeld.

a) Beschreiben Sie den Unterschied zum Ising-Modell und begründen Sie warum das Curie-Weiss Modell unrealistisch ist.

b) Formulieren Sie die Energie als Funktion der Magnetisierung $M_N(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$.

c) Seien $\nu = \beta J, b = \beta h$. Schreiben Sie das kanonische Maß $P_{N,\nu,b}(\sigma), \sigma \in \Omega_N$ explizit auf.

d) Sei $b = 0$. Diskutieren Sie heuristisch die Verteilung der Magnetisierung $p_{N,\nu}(m) := P_{N,\nu}(\{\sigma | M_N(\sigma) = m\})$, das heißt finden Sie die typischen Werte von M_N. Dazu:

d1) Welche Werte durchläuft m?

d2) Finden Sie die Anzahl der σ, für die $M_N(\sigma) = m$ ist. Benutzen Sie Stirlings Formel (Blatt 1) um den kombinatorischen Faktor (für große N) $\binom{N}{N(\frac{1}{2}+\frac{m}{2})}$ abzuschätzen. Der resultierende Ausdruck für $p_{N,\nu}(m)$ besteht aus zwei Faktoren, einen energetischen und einen entropischen. Diskutieren Sie erst die typischen $M_N(\sigma)$ für beide Faktoren einzeln und dann für $p_{N,\nu}(m)$ in Abhängigkeit von der Temperatur, d.h. von ν.

d3) Was ändert sich am typischen Verhalten wenn $b > 0$ ist?

e) Sei $b \neq 0$. Berechnen Sie die Zustandssumme $Z(N, \nu, b)$. Trick: Entkoppeln Sie die σ im Exponenten durch Benutzung der Formel

$$e^{a/2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{a}x} dx$$

indem Sie $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{\nu}{N}}(\sum_{i=1}^{N} \sigma_i)$ setzen. Im entstehenden Integral ist es sinnvoll $\eta = x\frac{1}{\sqrt{N\nu}}$ zu substituieren. Benutzen Sie die Laplace Methode (Beweis Stirling Formel Blatt 1) um das Integral für große N als

$$I(N) \sim C_N e^{Nf(\eta_{max})}$$

zu schreiben, wobei $\lim_{N\to\infty} \ln C_N = 0$. Hierbei ist η_{max} der Wert, der $f(\eta) = -\frac{\nu\eta^2}{2} + \ln(\cosh(\nu\eta + b))$ maximiert.

f) Sei $<>_{N,\nu,b}$ die Erwartungswertbildung mit dem kanonischen Maß. Zeigen Sie, dass $m(N,\nu,b) :=< M_N >_{N,\nu,b}= \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial b} \ln Z(N,\nu,b)$ ist. Berechnen Sie mit Hilfe von e) $m(\nu,b) := \lim_{N\to\infty} < M_N >_{N,\nu,b}$.

g) Diskutieren Sie das Verhalten von $m(\nu,b)$ in Abhängigkeit von der Temperatur, für $b \to \pm 0$.

h) Zeigen Sie, daß für ν groß genug für beliebige i,j $< \sigma_i\sigma_j >_{\mathbb{N},\nu,b}$ für $N \to \infty$ gegen 1 geht.