Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Detlef Dürr
Dr. D. Yarotskiy

Übungen zur Vorlesung Statistische Mechanik

Blatt 4

Die folgenden Aufgaben beruhen auf dem eindimensionalen mikroskopischen Modell der Brownschen Bewegung der Vorlesung. Atome und Brownsches Teilchen (BT) haben die gleiche Masse, die Wechselwirkung beruht auf elastischen Kollisionen.

Aufgabe 1.: Betrachten Sie das Modell für die Brownsche Bewegung der Vorlesung. Argumentieren Sie, dass $B(t) \approx B_A(t) = \frac{B(At)}{\sqrt{A}}$ (für großes A) unabhängige Zuwächse hat, und dass insbesondere gilt

a) $B(t) - B(s)$ ist unabhängig von $B(u), u \leq s$

b) $B(t) - B(s)$ hat die gleiche Verteilung wie $B(t-s)$

c) Zeigen Sie, dass a) und b) mit der ($A \to \infty$ Verteilung von $B(t)$ für $t \geq 0$, die in der Vorlesung hergeleitet wurde, nämlich mit der Dichte

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp - \frac{x^2}{2Dt}$$

konsistent ist. Das heißt, benutzen Sie $B(t) = B(t) - B(s) + B(s)$ und berechnen Sie die Dichte unter den Annahmen a) und b).

d) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}((B(t) - B(s))^2$. Warum ist es natürlich, dass die Pfade der Brownschen Bewegung nur Hölderstetig vom Grade 1/2 sind?

e) Berechnen Sie die Korrelation, dh. den Erwartungswert $\mathbb{E}(B(t)B(s))$. Den (im verallgemeinerten Sinne existierenden) Ableitungsprozess $B'(t), t \geq 0$ der Brownschen Bewegung nennt man weisses Rauschen. Überlegen Sie warum das vernünftig ist.

f) Sei $p(y,t,x,s)$ in

$$p(y,t,x,s)dydx := \mathbb{P}(B(t) \in dy \wedge B(s) \in dx)$$

die Dichte der gemeinsamen Verteilung von $B(t)$ und $B(s)$. Man kann diese wie folgt bestimmen: Wir kennen die gemeinsame Dichte von $B(t) - B(s)$ und $B(s)$. Nun gilt: Sei $\rho(x,y)$ die Dichte von der gemeinsamen Verteilung von X, Y dann hat $(X, X+Y)$ die Dichte $\tilde{\rho}(x,z) = \rho(F^{-1}(x,z))/|F'|$, wobei

$F(x,y) = (x, x+y)$ ist (einfache Substitutionsformel). Daraus berechne man $p(y,t,x,s)$.

g) Es sei $p(y,t;x,s) = \mathbb{P}(B(t) \in dy | B(s) = x)$ die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte. In der Tat gilt allgemein $p(y,t,x,s) = p(y,t;x,s)p(x,s)$. Geben Sie $p(y,t;x,s)$ an. Man nennt dies auch die Übergangswahrscheinlichkeit. Indem man die Überlegungen von oben fortführt findet man, dass die n-Punkt-Dichte

$$p(x_n, t_n, ...x_1, t_1) = p(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot ... \cdot p(x_2, t_2; x_1, t_1) p(x_1, t_1)$$

gilt. Dieses Produkt hat eine intuitive Erklärung im Sinne der Übergangswahrscheinlichkeiten. Indem Sie in einem Raum-Zeit Diagramm Tore $\Delta_1, ..\Delta_n$ bei den Zeiten $t_1, ...t_n$ zeichnen, können Sie sich die Pfade veranschaulichen, die zu der n-Punkt-Dichte beitragen.

h) Zeigen Sie: $p(y,t;x,s)$ löst die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

mit der Anfangsbedingung $p(y,s;x,s) = \delta(y-x)$. (Benutzen Sie dazu die Fouriertransformation.)

Anmerkung: Norbert Wiener hat die mathematischen Eigenschaften des Brownschen Prozess studiert, weswegen der Brownsche Prozess auch Wienerprozess genannt wird.

Aufgabe 2.: Man betrachte folgende $t = 0$ Konfiguration: Das BT habe die Koordinate $X(t)$ und die Geschwindigkeit $V(t)$ wobei $X(0) = 0$ und $V(=) = 1$, und es gibt nur zwei Atome: Ein Atom hat $x_1 = 1$ mit $v_1 = \pm 1$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ und ein Atom hat $x_2 = -2$ mit $v_2 = \pm 2$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$.

a) Skizzieren Sie das Raum-Zeit-Bild. Die Dynamik des gesamten Systems ist deterministisch, wenn man jedoch nur den Ort des Brownschen Teilchens betrachtet so ist dieser ein zufälliger Prozess.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $X(2)$ und $X(5)$.

c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $X(5)$ unter der Bedingung $X(2) = 2$ und unter der Bedingung $X(2) = 2, X(1) = 1$?

d) Das Ergebnis von c) besagt, dass der Prozess $X(t), t \geq 0$ kein Markoff Prozess ist (nach dem russischen Mathematiker Markoff). Bei einem Markoff Prozess ist die Zukunft von der Vergangenheit bei gegebener Gegenwart unabhängig. Der Brownsche Prozess (Aufgabe 1) ist ein Markoff-Prozess. Wie ist die Situation, wenn man das Paar $(X(t), V(t))$ betrachtet?

e) Das wahre Brownsche Teilchen ist enorm viel schwerer als die stoßenden Atome. Warum begünstigt das eine approximative Markoff-Eigenschaft des Brownschen Prozesses $X(t), t \geq 0$? Man denke dabei an die elastische Kollisions-Dynamik.