Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Detlef Dürr
Dr. D. Yarotskiy

Übungen zur Vorlesung Statistische Mechanik

Blatt 3

Seien der Zustandsraum mit Borel-Algebra und Maß gegeben: $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$, weiterhin sei $T : \Omega \to \Omega$ eine meßbare Abbildung, und $\mathbb{P}$ sei invariant unter T, d.h. $\mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\Omega)$. Dann heißt $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, T)$ ein dynamisches System. Die folgende Aufgabe knüpft an Blatt 1 an.

Aufgabe 1.: Sei $\Omega = [0, 1]$, $\mathbb{P} = \lambda$ das Lebesguemaß und

$$T : [0, 1[\to [0, 1[\ , x \to 2x \bmod 1$$

a) Zeichnen Sie den Graphen von T. Zeigen Sie: $\mathbb{P}(T^{-1}(I)) = \mathbb{P}(I)$ für alle dyadischen Intervalle $I = [2^{-l}, 2^{-k}], k < l$. Aus allgemeinen Sätzen der Maßtheorie folgt hieraus die Invarianz von $\mathbb{P}$ unter T. Wir haben also ein Modell für ein dynamisches System.

b) Stellen Sie $x \in [0, 1)$ dual dar. Wie wirkt T in der Dualdarstellung, d.h. wodurch wird T auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dargestellt?

c) Seien die Koordinatenabbildungen wieder $d_k : [0, 1) \to \{0, 1\}$. Es sei T^k die k-malige Hintereinanderschaltung von T. Zeigen Sie, dass $d_{k+1} = d_1 \circ T^k$. Folgern Sie, dass die Vergröberungen d_k alle identisch verteilt sind, d.h. $\mathbb{P}(d_k = a) = \mathbb{P}(d_1 = a)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \{0, 1\}$.

d) Von Blatt 1 wissen wir bereits, dass die Vergröberungen unabhängig sind. Seien $(n_k)_k$ und $(m_l)_l$ endliche Teilfolgen von $\mathbb{N}$ und seien $f = f((d_{n_k}))$ und $g = g(d_{m_l})$, d.h. f und g hängen nur über diese Koordinatenfunktionen von x ab. Man zeige, dass

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^1 dx f(T^p x) g(x) = \int_0^1 dx f(x) \int_0^1 dx g(x) \, .$$

Seien f, g die Indikatorfunktionen (charakteristische Funktion) von dyadischen Intervallen: z.B:

$$\mathbb{1}_{\{0\}}(d_1) \mathbb{1}_{\{1\}}(d_3)$$

Welches Intervall ist das? Was besagt die Gleichung dann für dyadische Intervalle? Interpretieren Sie das Ergebnis als Mischungseigenschaft.

In der Tat ist das dynamische System ergodisch und mischend. Erinnerung: Ergodisch bedeutet, dass invariante Mengen entweder Maß null oder eins haben $T^{-1}A = A \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0 \vee 1$. Äquivalent ist $f \circ T = f \Rightarrow f = const.$ $\mathbb{P}$ fast sicher. Man kann das letztere für das betrachtete System leicht zeigen, wenn man die Fouriertransformierte von f betrachtet (Übungsleiter fragen!)

e) Sei N groß. Betrachten Sie den Makrozustand $M_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} d_k$. Sei $n \approx N$, aber $n < N$ Zeigen Sie, dass für typische $x \in [0, 2^{-n}]$ der Makrozustand $M_N \approx 0$ ist. Das heißt, zeigen Sie, dass bei gegebenen $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ für N groß genug das Gesetz der großen Zahlen für das bedingte Maß gilt

$$\frac{\mathbb{P}([0, 2^{-n}] \cap \{x | M_N > \epsilon\})}{\mathbb{P}([0, 2^{-n}])} < \delta\,.$$

Warum wäre die unbedingte Aussage

$$\mathbb{P}([0, 2^{-n}] \cap \{x | M_N > \epsilon\}) < \delta$$

für den typischen Wert des Makrozustand wenig aussagekräftig?

f) Sei $K << N$ groß, so dass M_K typischerweise wenig schwankt. Was ist der typische Wert von $M_N(T^{pK}x)$, $p \in \mathbb{N}$ unter dem bedingten Maß? Skizzieren Sie die Werte als Funktion von $t = pK$ („ H-Kurve“).

g) Schätzen Sie für ein p die Fluktuation (Varianz) zwischen dem $p, p+1$ Wert ab. Was bedeutet das für den Verlauf der “wahren $H-$ Kurve”?

Aufgabe 2.: Über die Größe von Phasenraumvolumina. Man gebe das folgende Phasenraumvolumen von drei Teilchen an, die sich in einem eindimensionalen Universum befinden. Ein Teilchen sei im Bereich $[a_1, b_1]$, ein Teilchen in $[a_2, b_2]$ und eines in $[a_3, b_3]$. Skizzieren Sie das Phaseraumvolumen. Nun betrachten Sie ein ideales Gas mit N Teilchen in einem Volumen V. Den Phasenraum unterteile man in gleichgroße Zellen α_i mit Volumen $|\alpha_i| = \alpha$. Wie groß ist das Phasenraumvolumen des Makrozustandes bei dem N_i Teilchen in α_i $i = 1, 2, ...$ sind? Wie groß ist das Verhältnis der Phasenraumvolumina, wenn alle Teilchen in der linken Hälfte des Volumens sitzen und wenn das Volumen homogen (Gleichverteilung über alle Zellen) gefüllt ist?