Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Detlef Dürr
Dr. D. Yarotskiy

Übungen zur Vorlesung
Statistische Mechanik

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $V \subset \mathbb{R}^d$ ein endliches Volumen. Teilchen in V haben die Koordinaten $q_1, \dots, q_n$, wobei die Anzahl n der Teilchen variabel sei: $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Der Konfigurationsraum ist entsprechend $\Omega = \sqcup_{n \geq 0} V^n$ mit $V^n = \{(q_1, \dots, q_n), q_i \in V\}$. Hier $V^0 = \emptyset$ und die Vereinigung ist disjunkt, d.h. $\omega \in \Omega \Leftrightarrow \omega = \omega^{(n)} = (q_1, \dots, q_n)$ für ein n. Das Poissonfeld mit Dichte $\rho > 0$ ist das Typizitätsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω, welches durch

$$\frac{1}{Z(\rho)} \frac{\rho^n}{n!} dq_1 \dots dq_n$$

auf $V^n, n = 0, 1, 2, \dots,$ bestimmt ist.
(a) Berechnen Sie

$$Z(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \int_{V^n} dq_1 \dots dq_n.$$

(b) Sei $\Delta \subset V$, and N_Δ die Anzahl der Teilchen in Δ:

$$N_\Delta((q_1, \dots, q_n)) = \sum_{q_i \in \{q_1, \dots, q_n\}} \mathbf{1}_\Delta(q_i).$$

Berechnen Sie

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_\Delta = m) &= \mathbb{P}(\{\omega | N_\Delta(\omega) = m\}) \\ &= \sum_{n \geq m} \mathbb{P}(\{\omega^{(n)} \in V^n | N_\Delta(\omega^{(n)}) = m\}) \end{aligned}$$

Die Antwort ist

$$\mathbb{P}(N_\Delta = m) = e^{-\rho|\Delta|} \frac{(\rho|\Delta|)^m}{m!},$$

wobei $|\Delta|$ das Volumen von Δ ist.
(c) Berechnen Sie die Erwartungswert $\mathbb{E}(N_\Delta)$ von N_Δ, und die Varianz $\mathbb{E}(N_\Delta - \mathbb{E}N_\Delta)^2$.

(d) Zeigen Sie, dass für $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset, \Delta_1, \Delta_2 \subset V$, und $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathbb{P}(N_{\Delta_1} = m \text{ und } N_{\Delta_2} = k) = \mathbb{P}(N_{\Delta_1} = m)\mathbb{P}(N_{\Delta_2} = k)$$

gilt. Das heißt N_{Δ_1} und N_{Δ_2} sind unabhängig.
(e) Betrachten Sie folgende "thermodynamische Skalierung". Sei $d = 3$. Jedes Teilchen habe die Masse m. Setze $M = \rho m$ und betrachte $\rho \to \infty, m \to 0$ sodass $\rho m = M = const.$ Zeigen Sie, dass in diesem Limes für mN_Δ das Gesetz der großen Zahlen gilt, d.h. typischerweise ist $mN_\Delta \approx M|\Delta|$, oder genauer $\forall \epsilon > 0$ ist

$$\lim_{\rho \to \infty, m \to \infty, \rho m = M} \mathbb{P}(\{\omega : |mN_\Delta(\omega) - M|\Delta|| > \epsilon\}) = 0.$$

Aufgabe 2. Sei ein Volumen V mit N Gasteilchen gefüllt. Das Typizitätsmaß $\mathbb{P}$ für die Teilchenkonfiguration sei die uniforme Verteilung gegeben durch die Dichte $V^{-n} dq_1 \dots dq_n$. Sei $V_1 \subset V$. Bestimmen Sie das Typizitätsmaß für die Teilchenkonfiguration in V_1 in thermodynamischen Limes $N \to \infty, V \to \infty$ mit $N/V = \rho = const.$

Aufgabe 3. Betrachte das Poissonfeld auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit "Intensitätsmaß"

$$\mu(dq, dv) = \rho dq f(v) dv,$$

wobei $\rho > 0$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)dv = 1$. Das bedeutet: die Teilchenzahl N_A für $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist poissonverteilt,

$$\mathbb{P}(N_A = n) = e^{-\mu(A)} \frac{\mu(A)^n}{n!}$$

und N_A, N_B sind für $A \cap B = \emptyset$ unabhängig. q sei der Ort und v die Geschwindigkeit, d.h. ein Teilchen mit (q, v) bewegt sich entlang der Geraden $q + vt, t \in \mathbb{R}$. Sei $N([t_1, t_2])$ = Anzahl der Teilchen, die in der Zeit $[t_1, t_2]$ den Ursprung von links nach rechts überqueren. Berechnen Sie $\mathbb{P}(N([t_1, t_2]) = m)$.
Hinweis: Überlegen Sie, wie für gegebenes v der Ortsbereich aussieht, aus dem die Teichen zur Zeit $t = 0$ starten müssen, um in der angegebenen Zeit den Ursprung zu überqueren.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $f(x_1, ..., x_n) = y$ nach x_n auflösbar für alle y. Zeigen Sie dass das Oberflächenmäß auf der Fläche $f(x_1, \dots, x_n) = y$ als $d\sigma_y = \frac{||\nabla f||}{\frac{\partial f}{\partial x_n}} dx_1 ... dx_{n-1}$ schreibbar ist.