Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Detlef Dürr
Dr. D. Yarotskiy

Übungen zur Vorlesung
Statistische Mechanik

Blatt 1

Aufgabe 1. Verstehen Sie einen Beweis der Stirlingschen Formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1 + O(n^{-1})).$$

Ein Beweis ist auf Seiten 23 – 27 in ∼`duerr/Zuf.pdf` zu finden.

Aufgabe 2.
(a) Stellen Sie $x \in [0,1)$ dual dar, d.h. betrachten Sie die Koordinatenabbildungen $d_k : [0,1) \to \{0,1\}, k \in \mathbb{N}$. Drücken Sie x mit Hilfe der d_k aus.
(b) Sei $\mathbb{P} = \lambda$ das Lebesguemaß auf $[0,1]$. Wie sind die Bildverteilungen der Vergröberungen d_k? (Eine Betrachtung für $k = 1,2,3$ reicht für das Verständnis aus.)
(c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(\bigcap_{l=1}^{n}\{x|d_{k_l} = \delta_{k_l}\}) = \prod_{l=1}^{n} \mathbb{P}(\{x|d_{k_l} = \delta_{k_l}\}),$$

wobei $\delta_{k_l} \in \{0,1\}$ und $k_1, \ldots, k_n$ verschiedene natürliche Zahlen sind. (Betrachtung von $k = 1,2,3$ ist für das Verständnis ausreichend). Dies bedeutet, dass die Vergröberungen unabhängig sind.
(d) Folgern Sie aus (c), dass für Funktionen f, g mit $l \neq k$

$$\mathbb{E}(f(d_k)g(d_l)) = \mathbb{E}(f(d_k))\mathbb{E}(g(d_l))$$

gilt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\int f^2(\omega)d\mathbb{P}(\omega) < \infty$, dann gilt für alle $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\{\omega||f|(\omega) > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}(f^2).$$

Folgern Sie für $\mathbb{P} = \lambda$:

$$\forall \epsilon > 0 : \quad \lambda\left(\{x\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k(x) - \frac{1}{2}\Big| > \epsilon\}\right) \to 0$$

für $n \to \infty$. Interpretieren Sie diese Aussage.

Aufgabe 4. Sei für $l \in \mathbb{N}$: $A_l = \{x \in [0,1) | \sum_{k=1}^{n} d_k = l\}$. Berechnen Sie $\lambda(A_l)$.

Aufgabe 5. Betrachten Sie ein Galtonbrett mit n Nagelreihen. Beweisen Sie für das Galtonbrett das Gesetz der großen Zahlen in folgender Modellbildung.
(a) Sei $k \in \mathbb{N}$, setze $y^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} d_{(k-1)n+i}$. Was bedeutet $y^{(k)}$? Was sind Definitionsbereich D und Bildbereich B?
(b) Betrachten Sie die empirische Dichte

$$\rho_{emp}^{(N)} : B \times D \to [0,1]$$

gegeben durch

$$\rho_{emp}^{(N)}(l,x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \delta(y^{(k)}(x) - l).$$

Zeigen Sie das Gesetz der großen Zahlen für $\rho_{emp}^{(N)}$:

$$\forall \epsilon > 0 : \quad \lambda\left(\{x \Big| \rho_{emp}^{(N)}(l,x) - \frac{1}{2^n} \binom{l}{n} \Big| > \epsilon\} \right) \to 0.$$

Aufgabe 5. Definieren Sie Vergröberungen X, Y auf $[0,1)$ mit

$$X : [0,1) \to \{1,2,3,4,5,6\} \ , Y : [0,1) \to \{1,2\}$$

so dass sie unter dem Lebesguemaß unabhängig sind.