PROF. DR. DETLEF DÜRR
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SS 2005

Übungen zur Vorlesung
Bohmsche Mechanik
als Grundlage der Quantenmechanik

Blatt 3, Thema: Zufall

$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $T : \Omega \to \Omega$ eine meßbare Abbildung, und das Typizitätsmaß $\mathbb{P}$ sei invariant unter T, d.h. $\mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\Omega)$. Dann heißt $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, T)$ ein dynamisches System.

Aufgabe 1: Sei $\Omega = [0, 1[$, $\mathbb{P} = \lambda$ das Lebesguemaß und

$$T : [0,1[\to [0,1[\ \ , x \to 2x \bmod 1$$

Zeichnen Sie den Graphen von T. Zeigen Sie: $\mathbb{P}(T^{-1}(I) = \mathbb{P}(I)$ für alle Intervalle I. Dies zeigt im wesentlichen die Invarianz von $\mathbb{P}$ unter T. Wir haben also ein Modell für ein dynamisches System.

Stellen Sie $x \in [0, 1[$ dual dar, und betrachten Sie die Koordinatenabbildungen $d_k : [0, 1[\to \{0, 1\}$ und drücken Sie x mit Hilfe der d_k aus. Wie wirkt T in der Dualdarstellung? Es sei T^k die k-malige Hintereinanderschaltung von T.Zeigen Sie $d_{k+1} = d_k \circ T^k$. Folgern Sie, dass die Vergröberungen d_k alle identisch verteilt sind, d.h. $\mathbb{P}(d_k = a) = \mathbb{P}(d_1 = a)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Vergröberungen $d_k : [0, 1[\to \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{N}$ unter $\mathbb{P} = \lambda$ unabhängig sind. Finden Sie ein anderes Maß $\mathbb{P}'$, so dass die d_k nicht unabhängig sind.

Aufgabe 3: Zeigen Sie: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\int f^2(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < \infty$, dann gilt für alle $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|f| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}(f^2).$$

Folgern Sie für $\mathbb{P} = \lambda$:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \mathbb{P}\big(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k - \frac{1}{2}| > \epsilon\big) \to 0$$

für $n \to \infty$. Interpretieren Sie diese Aussage.

Aufgabe 4: Definieren Sie Vergröberungen X, Y auf $[0, 1[$ mit

$$X : [0, 1[\to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \ , Y : [0, 1[\to \{1, 2\}$$

so dass sie unter dem Lebesguemass unabhängig sind.