

ÜBER DIE  
STRAHLUNGSDÄMPFUNGSGLEICHUNG  
BEWEGTER LADUNGEN

BACHELORARBEIT VON  
MARTIN OELKER

BETREUT VON  
PROF. DR. DETLEF DÜRR

VORGELEGT DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK  
DER  
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

21. DEZEMBER 2010

DANKSAGUNG: Vorneweg möchte ich mich ganz herzlich für die immer vorhandene Bereitschaft, mir bei Fragen zu helfen, und die ganz wunderbare Betreuung bei Herrn Prof. Dürr, Dirk-André Deckert, Niklas Boers, Nicola Vona und Christian Beck bedanken.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Die Lorentz-Dirac-Gleichung</b>	<b>6</b>
2.1	Herleitung durch Linearisieren der Lorentz-Gleichung . . . . .	7
2.2	Herleitung mittels Energie-Impulserhaltung . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Diskussion</b>	<b>14</b>
3.1	Was ist die beste Beschreibung für das klassische Elektron? . .	14
3.2	Lösungen der Lorentz-Dirac-Gleichung . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Strahlungsdämpfung im Elektromagnetismus nach Wheeler-Feynman</b>	<b>19</b>
4.1	Die Theorie . . . . .	20
4.2	Strahlungsdämpfung . . . . .	22
4.3	Weiteres zum Wheeler-Feynman-Elektromagnetismus . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Schluss</b>	<b>26</b>



# 1 Einleitung

Mit der Veröffentlichung der Maxwell-Gleichungen 1861 bzw. 1862 durch James Clark Maxwell beginnt die Geschichte einer der erfolgreichsten Theorien der Physik: die der klassischen Elektrodynamik. Erfolgreich insofern, als sich auf ihre Grundgleichungen eine unüberschaubare Vielzahl von Anwendungen stützt und ihre Vorhersagen in glänzender Übereinstimmung mit dem Experiment stehen. Damit einher geht auch die Entstehung des Konzeptes des elektromagnetischen Feldes. Es entstand eine Wechselwirkungstheorie geladener Teilchen mit den Feldern und, mittels dieser Felder, auch mit anderen geladenen Teilchen. Durch diese Wechselwirkung verändern sich sowohl die Felder als auch die Bewegungen der Teilchen und man wird im Wesentlichen mit zwei Aufgabenstellungen konfrontiert: *Berechne bei gegebenen Ladungen bzw. Quellen die Felder!* und *Berechne bei gegebenen Feldern die Dynamik der Teilchen!* Die Dynamik ist bei gegebenen Feldern durch die Lorentz-Gleichung bestimmt. Bei Lösung der Maxwell-Gleichungen wird klar, dass beschleunigte Ladungen Strahlung erzeugen, d.h. Felder, die nach Abstrahlung unabhängig von der Ladung sind und dann frei durch den Raum propagieren. Diese Felder wirken auf alle Ladungen im Raum, also auch auf die, durch welche sie erzeugt wurden. Demnach muss man nun folgende Aufgabe lösen: *Berechne Felder und Dynamik des Teilchens simultan!*, was nichts anderes heißt, als dass man Maxwell-Gleichungen und Lorentz-Gleichung mit einander gekoppelt lösen muss. Damit entsteht das Problem der Selbstwechselwirkung oder Strahlungsdämpfung, auf Englisch *radiation reaction*, denn die Lösungen der Maxwell-Gleichungen sind am Ort der Quelle singularär, genau dort müssen sie aber ausgewertet werden.

Konnte man bei ersteren Aufgabenstellungen problemlos Punktladungen annehmen, wird nun genau das zum Problem, da man eine Bewegungsgleichung aufstellen möchte, die jene Selbstwechselwirkung berücksichtigt: Das Feld würde am Ort der Ladung unendlich. Konsequenterweise dachte man sich das Elektron nun eben als ausgedehnt. Damit stellten Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts Hendrik Antoon Lorentz und Max Abraham eine Bewegungsgleichung für das Elektron auf, die Strahlungsdämpfungsgleichung, deren relativistische Verallgemeinerung schließlich Max von Laue vornahm. Da Paul A.M. Dirac 1938, allerdings unter der Annahme von Punktteilchen, auf dieselbe Gleichung kam, heißt diese Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichung, oder auch nur Lorentz-Dirac-Gleichung. Wie man die Lorentz-Dirac-Gleichung sowohl nach Lorentz als auch nach Dirac herleitet, welche Schwierigkeiten auftreten und ob klassische Elektrodynamik in der Lage ist, Selbstwechselwirkung zufriedenstellend zu beschreiben, wird in den Abschnitten zwei und drei behandelt.

Abschnitt vier stellt eine neue Herangehensweise vor, die von John A. Wheeler und Richard P. Feynman stammt. Sie unternahmen es Mitte der Vierziger Jahre des letzten Jahrhunderts, Feldtheorie an sich kritisch zu untersuchen. Dabei kamen sie auf eine schon längst bekannte, aber nie abge-

rundete Idee zurück, nämlich die der Fernwirkung. Das Besondere hierbei ist, dass es keine Felder, sondern nur noch Teilchen gibt. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, ob der Wheeler-Feynman-Elektromagnetismus Gleiches leistet wie die so erfolgreiche Beschreibung mit Feldern und falls ja, inwiefern.

## 2 Die Lorentz-Dirac-Gleichung

Ausgangspunkt für die Überlegungen zur Dynamik eines Elektrons sind die Maxwell-Gleichungen für beliebige Quellen, also Ladungsdichte  $\rho$  und Stromdichte  $\mathbf{j}$ , im Vakuum

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

und als Bewegungsgleichung eines Teilchens mit Masse bzw. gesamten Trägheitskoeffizienten  $m$  die Lorentz-Gleichung

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = \int \left[ \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] d\mathbf{r}.\tag{2}$$

Nach Einführung des Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  sowie des skalaren Potentials  $\Phi$  mittels

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\tag{3}$$

ergeben sich folgende Feldgleichungen für die Potentiale, hier schon in der Lorenzeichung  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi = 0$ :

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{r}, t) &= -4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \\ \Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\tag{4}$$

In kovarianter Formulierung<sup>1</sup> mit Metrik  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  sind diese in der Lorenzeichung  $\partial_\mu A^\mu = 0$  gegeben durch

$$\square A^\mu = \begin{cases} 4\pi j^\mu & \text{mit Quellen.} \\ 0 & \text{ohne Quellen.} \end{cases}\tag{5}$$

---

<sup>1</sup>Sobald in kovarianter Formulierung gearbeitet wird, sind alle Größen in natürlichen Einheiten gegeben, d.h.  $c = 1$ .  $z^\mu(s)$  bezeichnet die Weltlinie eines Teilchens, parametrisiert mit der Eigenzeit  $s$ ,  $\dot{z}^\mu$  die erste Ableitung nach der Eigenzeit. Der Index  $\mu$  läuft von 0 bis 3.

Aus den Lösungen  $A^\mu$  dieser kovarianten Form wird in üblicher Weise der antisymmetrische Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}$  konstruiert, genauer:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu, \quad (6)$$

womit sich die Lorentz-Gleichung dann schreiben lässt als

$$m\ddot{z}^\mu = eF^{\mu\nu}(z)\dot{z}_\nu. \quad (7)$$

## 2.1 Herleitung durch Linearisieren der Lorentz-Gleichung<sup>2</sup>

Das Charakteristikum der Strahlungsdämpfung ist die Wechselwirkung des bewegten Teilchens mit sich selbst. Um sich noch nicht von vorneherein auf Punktteilchen zu beschränken, betrachten wir zunächst eine „ausgeschmierte“ Ladungsverteilung der Gesamtladung  $e$ , d.h. wir nehmen an, sie sei ausge dehnt, starr und kugelförmig mit Radius  $r$ , also rotationsinvariant.

Die Lösungen von (4) sind die Potentiale

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \end{aligned}$$

**ANMERKUNG: Retardierte/Avancierte Potentiale** Im Argument von  $\rho(\mathbf{r}', t')$  sowie  $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$  bzw. als Vierervektor  $j^\mu(x, t')$  kann  $t'$  für zwei mögliche Zeiten stehen, wobei beide dazugehörigen  $A^\mu(x, t'_{1/2})$  Lösungen der Maxwell-Gleichungen sind: für die retardierte Zeit  $t'_1 = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  oder für die avancierte Zeit  $t'_2 = t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Entsprechend heißen die jeweiligen Potentiale retardiert,  $A_{ret}$ , oder avanciert,  $A_{adv}$ . Benutzt man  $A_{ret}$  wird die Quelle um genau das Zeitintervall früher ausgewertet, welches die Strahlung benötigt, um vom Sender zum Empfänger zu gelangen; bei  $A_{adv}$  geht es genau in die andere Zeitrichtung: Die Quelle wird zu einem späteren Zeitpunkt ausgewertet, als der, an welchem zum Empfänger ein Signal gelangt. Die Lösungen haben demnach, wie die Maxwell-Gleichungen selbst, eine zeitsymmetrische Struktur. Will man also eine allgemeine Lösung angeben, muss man diese Symmetrie respektieren und der Lösung folgende Form geben:  $A = cA_{ret} + (1 - c)A_{adv}$ ,  $0 < c < 1$ .  $A_{ret}$  und  $A_{adv}$  sind zwar vollständig gleichberechtigt, aber nur  $A_{ret}$  ist empirisch direkt wahrnehmbar,  $A_{adv}$  jedoch nicht. In den meisten Lehrbüchern wird nun dieser empirischer Sachverhalt als Grund dafür angegeben, dass man sich nur auf die retardierten Potentiale zu beschränken habe. Doch das ist ein Prinzip, welches nicht aus der Physik bzw. der Theorie entspringt,

<sup>2</sup>Die Herleitung richtet sich nach [SS73] und [Jac99], geht aber ursprünglich auf Lorentz zurück.

sondern einfach zur Regel gemacht wird, mit dem Verweis, dass die Ursache immer der Wirkung vorausgehen müsse. Nun ist es jedoch Aufgabe der Physik, ihre Gleichungen auszuwerten, an dieser Stelle also zu erklären, *warum* nur die retardierten Lösungen in irgendeiner Form wahrnehmbar sind und nicht, genau diese Tatsache zum Prinzip zu machen und ihre Gleichungen bzw. deren Lösungen entsprechend zu stützen. 1909 war dies Gegenstand einer Diskussion zwischen Albert Einstein und Walter Ritz [ER09]. In dieser plädierte Ritz für die Einschränkung auf die retardierten Lösungen, weil diese für ihn die Wurzel des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik seien. So ist die Tatsache, dass Strahlung immer nur in eine Zeitrichtung abgestrahlt wird – die avancierten Lösungen bedeuten nichts anderes, als dass Strahlung rückwärts in der Zeit ausgestrahlt wird – der Grund dafür, dass die Entropie immer anwächst. Einstein hingegen vertrat die Ansicht, dass diese eindeutige Zeitrichtung ausschließlich auf Wahrscheinlichkeitsgründen beruhe, sich also eine Lösung mithilfe der Statistischen Mechanik finden lassen sollte. Dies sollte nicht verwundern, denn auch die Bewegungen von Gasmolekülen werden durch eine zeitsymmetrische Theorie beschrieben, der Newtonschen Mechanik. Die Tatsache aber, dass beispielsweise Gas, das aus einer Ecke eines Raumes in den ganzen Raum ausströmt, nicht einfach wieder in diese Ecke zurückkehrt, also zeitsymmetrisches Verhalten an den Tag legt, wird eben erst im Rahmen der Statistischen Mechanik klar. Durch die Absorber-Hypothese im Wheeler-Feynman-Elektromagnetismus, siehe Abschnitt 4, wird es möglich sein, genau solch eine Erklärung geben zu können.

Als Quellen betrachten wir nur die Ladungsverteilung des Teilchens selbst, also  $\rho$  bzw.  $\mathbf{j}$ ; andere Quellen, wie z.B. von außen angelegte Felder, können in der Bewegungsgleichung durch Superposition einer Kraft  $\mathbf{F}_{ext}$  nachträglich berücksichtigt werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns zunächst auf den nichtrelativistischen Fall  $\frac{v}{c} \ll 1$ . Dadurch geht in die Lorentz-Gleichung (2) nur das elektrische Feld aus (3) ein. Weiter gehen wir davon aus, dass die Selbstwechselwirkung nur in unmittelbarer Nähe des Teilchens selbst nicht vernachlässigbar ist, das Zeitintervall  $\frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  also extrem kurz ist. Mathematisch heißt das, es ist möglich auf der rechten Seite der Lorentz-Gleichung für diesen Fall<sup>3</sup>

$$m_0 \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = - \int \rho(\mathbf{r}, t) \int \left( \nabla \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' d\mathbf{r} =: \mathbf{F}$$

$\rho(\mathbf{r}', t')$  und  $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$  um  $t = t'$  in einer Taylorreihe zu entwickeln. Für diese Entwicklung ergibt sich mit  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  und  $t' = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  für  $\alpha = \rho$  bzw.  $\alpha = \mathbf{j}$

$$\alpha(\mathbf{r}', t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{R}{c} \right)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \alpha(\mathbf{r}', t),$$

---

<sup>3</sup>Das zusätzlich indizierte  $m_0$  soll darauf hinweisen, dass es sich nicht um die experimentelle Masse handelt, wie sich weiter unten zeigt.

womit sich für  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( \rho(\mathbf{r}', t) \nabla R^{n-1} + \frac{R^{n-1}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \right) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}$$

ergibt. In dieser Entwicklung sind die Terme für  $n = 0$  bzw.  $n = 1$  identisch null: Ersterer, weil er die elektrostatische Selbstenergie auf den Schwerpunkt ausdrückt, welche aufgrund der kugelförmigen Ladungsverteilung verschwindet; letzterer, weil er einen Term  $\nabla R^{1-1} = \nabla 1 = 0$  enthält. Die nun mögliche Substitution des Summationsindex' von  $n$  zu  $m + 2$  in dem  $\rho$ -Teil der Entwicklung liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+2)! c^{m+2}} \int \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m+2}} \rho(\mathbf{r}', t) \nabla R^{m+1} d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^{n+2}} \int \rho(\mathbf{r}, t) R^{n-1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^{n+2}} \int \rho(\mathbf{r}, t) R^{n-1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} Q d\mathbf{r}' d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (8)$$

wobei

$$Q := \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', t) \frac{\nabla R^{n+1}}{(n+1)(n+2)R^{n-1}}$$

ist, was mithilfe der Kontinuitätsgleichung  $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  zu

$$Q = \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) - \frac{\mathbf{R}}{n+2} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$$

wird. Durch partielle Integration über die gestrichene Variable aus (8) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int R^{n-1} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' - \frac{1}{n+2} \int R^{n-1} \mathbf{R} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \\ &= \int R^{n-1} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' - \frac{1}{n+2} \int (\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} R^{n-1}) \mathbf{R} d\mathbf{r}' \\ &= \int R^{n-1} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' - \frac{1}{n+2} \int R^{n-1} \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) + (n-1) \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^2} \right) d\mathbf{r}' \\ &= \int R^{n-1} \left[ \frac{n+1}{n+2} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) - \frac{n-1}{n+2} \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^2} \right] d\mathbf{r}', \end{aligned}$$

und mit  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , wobei  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit des Teilchens ist, folgt weiter

$$= \int R^{n-1} \underbrace{\rho(\mathbf{r}', t) \left[ \frac{n+1}{n+2} \mathbf{v}(t) - \frac{n-1}{n+2} \frac{(\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^2} \right]}_{= Q} d\mathbf{r}'.$$

Da wir von einer kugelförmigen, starren Ladungsverteilung ausgegangen sind, kommen uns nun Symmetrieüberlegungen zu Hilfe. Zunächst einmal geht von  $Q$  nur der zu  $\mathbf{v}$  parallele Anteil ein, da sich alle anderen Anteile bei Integration über  $d\mathbf{r}$  und  $d\mathbf{r}'$  gerade wegheben. Also bleibt nur

$$\rho(\mathbf{r}', t) \left[ \frac{n+1}{n+2} \mathbf{v}(t) - \frac{n-1}{n+2} \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{R}}{R^2} \left( \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{v}(t)}{v} \right) \frac{\mathbf{v}(t)}{v} \right] \quad (9)$$

von  $Q$  übrig. Da jedoch alle Richtungen von  $\mathbf{R}$  gleich wahrscheinlich sind, kann der zweite Term in (9) durch seinen Mittelwert  $\frac{1}{3}$  ersetzt werden. Dadurch reduziert sich  $Q$  schließlich auf

$$Q = \frac{2}{3} \rho(\mathbf{r}', t) \mathbf{v}(t).$$

Dies eingesetzt in (8) liefert für  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{c^{n+2}} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \mathbf{v}(t) \int \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t) R^{n-1} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}.$$

Da  $R$  als klein angenommen wird – schließlich ist man ja gerade an der Selbstwechselwirkung interessiert – und die Ladungsverteilung starr sein soll, befindet sich die einzige physikalisch relevante Zeitabhängigkeit in der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$ . Eine weitere Vereinfachung des Integrals, die nichts am Verständnis der physikalischen Situation ändert, ist die Annahme einer Oberflächenladung. Die ersten Glieder der Entwicklung haben somit folgende Gestalt:

$$\mathbf{F} = -\frac{4}{3c^2} \frac{e^2}{2r} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{v}(t) + \dots \quad (10)$$

Die resultierende Bewegungsgleichung, nun auch mit dem Trägheitskoeffizienten des elektromagnetischen Feldes, sieht somit näherungsweise, denn höhere Potenzen des sehr kleinen  $R$  werden vernachlässigt, folgendermaßen aus:

$$\left( m_0 + \frac{4}{3c^2} \frac{e^2}{2r} \right) \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_{ext} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{x}(t). \quad (11)$$

Besonders zu beachten ist, dass für immer kleiner werdende  $r$ , was für den Elektronenradius typischerweise gilt, da man sich immer mehr dem Punktteilchen annähert, der zweite Term des Trägheitskoeffizienten auf der linken Seite immer größer wird. Der gesamte Koeffizient soll aber für die experimentelle Masse des Teilchens stehen, welche fix ist. Dies bedeutet nichts anderes als die Notwendigkeit, bei genügend kleinen  $r$  auch  $m_0$  zu manipulieren. Dieses Thema, Massenrenormierung, wird weiter unten noch tiefer behandelt.

Für einen kovarianten Ausdruck dieser Gleichung ist es notwendig, dass der Trägheitskoeffizient auf der linken Seite von (11) einen Vierervektor bildet. Hierbei stört jedoch der Faktor  $\frac{4}{3}$ , weswegen dieser Umstand in der Literatur auch als  $\frac{4}{3}$ -Problem bezeichnet wird. Gelöst wurde es von Poincaré

1906 [Poi06], der Bindungskräfte nicht-elektromagnetischen Ursprungs, die sogenannten *Poincaré stresses*, ebenso beachtete. Dann nämlich verschwindet dieser Faktor. Einen guten historischen Überblick und eine ausführlichere Lösung findet man in [Roh97].

Für den Term mit der dritten Zeitableitung auf der rechten Seite von (11) überprüft man im Grenzfall nichtrelativistischer Geschwindigkeiten, dass

$$\frac{2e^2}{3} (\ddot{z}^\mu - \dot{z}^\mu \dot{z}_\alpha \dot{z}^\alpha) = \frac{2e^2}{3} (\ddot{z}^\mu + \ddot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha \dot{z}^\mu) \quad (12)$$

der richtige Vierervektor ist, der auch die Bedingung  $K^\mu \dot{z}_\mu = 0$  erfüllt, welche von jedem Kraftvierervektor  $K^\mu$  erfüllt werden muss. In (12) wurde die Identität  $\dot{z}_\alpha \dot{z}^\alpha = -\ddot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha$  benutzt.

Die Bewegungsgleichung für beliebige Geschwindigkeiten, die Lorentz-Dirac-Gleichung, erhält somit in kovarianter Form folgende Gestalt:

$$m\ddot{z}^\mu = eF_{ext}^{\mu\nu}\dot{z}_\nu + \frac{2e^2}{3} (\ddot{z}^\mu + \ddot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha \dot{z}^\mu), \quad (13)$$

wobei hier der Trägheitsterm aus (11) durch  $m$  repräsentiert wird.

## 2.2 Herleitung mittels Energie-Impulserhaltung

Bei gegebener Weltlinie eines Punktteilchens  $z^\mu(s)$  mit Eigenzeit  $s$  geht P.A.M. Dirac in [Dir38] nun daran, durch Ausnutzen von Energie- und Impulserhaltung eine Bewegungsgleichung für das abstrahlende Elektron aufzustellen. Die Stromdichte als Quelle des Feldes eines solchen Punktteilchens ist dann mithilfe einer vierdimensionalen Delta-Funktion gegeben durch

$$j^\mu(x) = e \int ds \dot{z}^\mu \delta(x - z), \quad (14)$$

wobei  $\dot{z}^\mu$  die Ableitung von  $z^\mu$  nach der Eigenzeit  $s$  bezeichnet. Es wird also ganz bewusst nicht die Lorentz-Gleichung (2) verwendet, um den Einfluss der Selbstwechselwirkung mit einzubeziehen. Damit ist Diracs Herleitung der durch Linearisierung nach Lorentz genau entgegengesetzt: Sie bestimmt die Kraft, die auf ein Elektron wirken muss, damit es eine bekannte Trajektorie durchläuft, und versucht nicht, durch Verfeinerung der Kraft (2) eine Trajektorie als Lösung zu erreichen, die mit der tatsächlichen, bei Dirac gegebenen übereinstimmt. Zu diesem Zweck ummantelt man die Weltlinie mit einem vierdimensionalen Zylinder, dessen konstanter Radius  $r$  als sehr klein zu denken ist und dessen exakte Form bei hinreichend klein gewähltem Radius keinen Einfluss nimmt. Die Idee besteht nun darin, dass der gesamte Energie- bzw. Impulsfluss durch die dreidimensionale Oberfläche des Zylinders gleich der Energie- bzw. Impulsdifferenz  $\Delta P^\mu$  an den Enden des Zylinders sein muss, d.h.

$$\Delta P^\mu = \int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu}. \quad (15)$$

Hierzu benötigt man den Energie-Impulstensor  $T^{\mu\nu}$ . Diesen erhält man aus

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[ F^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right], \quad (16)$$

wobei  $F^{\mu\nu} = F_{in}^{\mu\nu} + F_{ret}^{\mu\nu}$  gilt. Von außen angelegte Felder werden durch  $F_{in}^{\mu\nu}$  beachtet,  $F_{ret}^{\mu\nu}$  steht für die vom Punktteilchen abgetrahlten, retardierten Felder. Dirac berechnet (15) und erhält

$$\Delta P^\mu = \int \left[ \frac{e^2}{2r} \ddot{z}^\mu - e \left( F_{in}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu}) \right) \dot{z}_\nu \right] ds. \quad (17)$$

Da der Fluss durch die Oberfläche gleich der Differenz an den Enden des Zylinders sein muss, muss sich der Integrand von (17) als exaktes Differential, welches bestimmt werden muss, darstellen lassen, also

$$\dot{P}^\mu \stackrel{!}{=} \frac{e^2}{2r} \ddot{z}^\mu - e \left( F_{in}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu}) \right) \dot{z}_\nu. \quad (18)$$

Hierdurch sieht man, dass eine weitere Einschränkung für  $\dot{P}^\mu$  durch  $\dot{z}_\mu \dot{P}^\mu = 0$  gegeben ist, wobei die Identität  $\dot{z}_\mu \ddot{z}^\mu = 0$  verwendet wird. Der einfachste Lösungsansatz ist nun  $P^\mu = -m_0 \dot{z}^\mu$ . Setzt man diesen in (18) ein, ergibt sich für die Konstante

$$-m_0 = \frac{e^2}{2r} - m \quad \text{bzw.} \quad m = m_0 + \frac{e^2}{2r}. \quad (19)$$

Dirac schreibt, dass  $m$  eingeführt wird, um beim Grenzübergang zum Punktteilchen und Annahme einer negativ unendlichen nackten Masse  $m_0$  aus (19) einen sinnvollen, also finiten Wert zu erhalten. Diesen Prozess nennt man klassische Massenrenormierung, genauer:

$$\frac{e^2}{2r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty \quad \text{und} \quad m_0 \rightarrow -\infty \implies -\infty + \infty = m. \quad (20)$$

Hierbei nimmt  $m$  den Platz der experimentell bestimmbar Masse des Elektrons ein. Den Grenzübergang  $m_0 \rightarrow -\infty$  rechtfertigt man durch die Notwendigkeit, die positiv unendliche Feldmasse des Punktteilchens zu kompensieren.

Aus (18) ergibt sich nun mit  $P^\mu = (e^2/2r - m) \dot{z}^\mu$

$$m \ddot{z}^\mu = e \left( F_{in}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu}) \right) \dot{z}_\nu. \quad (21)$$

Den genauen Ausdruck für die halbe Differenz des retardierten und avancierten Feldes, der auch auf der Weltlinie  $z^\mu(s)$  nicht singulär ist, hat Dirac ebenfalls berechnet und zwar zu

$$\frac{1}{2} (F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu}) = \frac{2e}{3} (\ddot{z}^\mu \dot{z}^\nu - \ddot{z}^\nu \dot{z}^\mu), \quad (22)$$

womit die gesuchte Bewegungsgleichung, die Lorentz-Dirac-Gleichung, letztendlich von folgender Gestalt ist:

$$m\ddot{z}^\mu = eF_{in}^{\mu\nu}\dot{z}_\nu + \frac{2e^2}{3}(\ddot{z}^\mu + \ddot{z}_\alpha\dot{z}^\alpha\dot{z}^\mu), \quad (23)$$

bei Benutzung der Identitäten  $\dot{z}_\alpha\dot{z}^\alpha = 1$  sowie  $\dot{z}_\alpha\ddot{z}^\alpha = -\ddot{z}_\alpha\dot{z}^\alpha$ . Natürlich stimmen (13) und (23) überein.

**ANMERKUNG: Das Strahlungsfeld** Sowohl in Abschnitt 2.1 als auch in 2.2 wurden die retardierten Lösungen als Ansatz benutzt: In der Herleitung nach Lorentz wurden sie in einer Taylorreihe entwickelt, in der nach Dirac wurden sie benutzt, um einen Ausdruck für den Energie-Impulstensor zu bekommen (in beiden Fällen werden die externen Felder natürlich hinzuaddiert). Das retardierte Feld lässt sich in verschiedene Anteile aufteilen:

$$F_{ret} = \frac{1}{2}(F_{ret} + F_{adv}) + \frac{1}{2}(F_{ret} - F_{adv}). \quad (24)$$

Der zweite Summand ist nun genau das Strahlungsfeld, wie eine Überlegung von Dirac aus [Dir38] klar macht. Dazu betrachtet man als Quelle ein beschleunigtes Elektron. In dessen Umgebung lösen dann sowohl dessen retardiertes Feld  $F_{ret}$  als auch ein durch eine externe Quelle erzeugtes, einstrahlendes Feld  $F_{in}$  die Maxwell-Gleichungen (5). Das gesamte Feld ist also

$$F_{ges} = F_{ret} + F_{in}. \quad (25)$$

Andere Lösungen dieser Gleichung sind das avancierte Feld des Elektrons  $F_{adv}$  und, in Analogie zu  $F_{in}$ , ein aus der Umgebung des Elektrons herausstrahlendes Feld  $F_{out}$ , was für das gesamte Feld dann

$$F_{ges} = F_{adv} + F_{out} \quad (26)$$

ergibt. Dirac beachtet also die weiter oben erwünschte Symmetrie der Lösungen unter Zeitumkehr schon. Das für die Strahlungsdämpfung verantwortliche Feld ist nun durch die Differenz aus  $F_{out}$  und  $F_{in}$  gegeben, nämlich

$$F_{rad} = F_{out} - F_{in} = F_{ret} - F_{adv},$$

wobei im letzten Schritt (25) und (26) verwendet wurden. Also ist das abgestrahlte Feld proportional zum zweiten Summanden aus (24), welcher in (22) schon angegeben wurde. Den ersten Summanden hat Dirac ebenfalls berechnet und zwar zu

$$\frac{1}{2}(F_{ret}^{\mu\nu} + F_{adv}^{\mu\nu}) = \frac{e}{2r}(\ddot{z}^\nu\dot{z}^\mu - \ddot{z}^\mu\dot{z}^\nu),$$

wobei hiervon nur der zweite Term überlebt, wenn man mit  $\dot{z}_\nu$  kontrahiert, was in der Lorentz-Gleichung (7) gemacht wird. In diesem Teil von  $F_{ret}$ , dem Coulomb-Anteil, steckt die Divergenz beim Betrachten von Punktteilchen. Während Dirac durch äußerst geschickte Wahl der Konstanten in (19) diese Divergenz wegschubtrahiert und nur noch den „richtigen“, d.h. für die Strahlungsdämpfung verantwortlichen Teil von  $F_{ret}$  behält, wird in der Herleitung nach Lorentz stets das ganze retardierte Feld benutzt und man wird mit dieser Divergenz konfrontiert, wenn man (11) für Punktteilchen verwenden möchte.

### 3 Diskussion

In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse der Maxwell-Lorentz-Theorie und des Ansatzes von Dirac bezüglich der Strahlungsdämpfung untersucht und hinsichtlich ihrer Eignung für eine abgeschlossene, klassische Theorie des Elektrons bewertet werden.

#### 3.1 Was ist die beste Beschreibung für das klassische Elektron?

In Abschnitt 2 stehen sich zwei grundlegend verschiedene Beschreibungen des klassischen Elektrons gegenüber: einmal die ausgeschmierte Ladungsverteilung bei Lorentz, zum andern das Punktteilchen bei Dirac.

Der Hauptgrund, einen endlichen Elektronenradius, der freilich extrem klein gedacht wird, anzunehmen, ist die Singularität des elektromagnetischen Feldes des Elektrons am Ort dieses Elektrons selbst. Dadurch ist dieses Feld mit einer positiv unendlichen Feldmasse behaftet. Dies ist schnell einzusehen, denn die elektrische Feldenergiedichte  $u = \frac{1}{8\pi}|E|^2$  liefert für ein Elektron mit Radius  $a$  die elektrostatische Selbstenergie  $U_{elek} = \frac{e^2}{2a}$  bzw. elektrostatische Masse  $m_{es} = \frac{e^2}{2c^2 a}$ , welche bei einem Grenzprozess  $a \rightarrow 0$  divergieren.

Der kürzeste, aber treffendste Einwand gegen einen endlichen Elektronenradius stammt von Richard Feynman [Fey07]: Die ganze Schönheit der Theorie ginge verloren.

Hinter diesem Einwand verbergen sich eine ganze Reihe gewichtiger Gründe. Zunächst einmal tun sich Widersprüche zur speziellen Relativitätstheorie auf. Zwar wurde – erstaunlicherweise erst 1964 – von Nodvik [Nod64] gezeigt, dass es möglich ist, die Stromdichte einer ausgedehnten Ladungsverteilung korrekt Lorentz zu boosten. Dabei stellte sich aber heraus, dass es ab einer bestimmten Beschleunigung (genauer: für Beschleunigungen, die größer sind als  $c^2/(\text{Radius im Ruheframe})$ ) dazu kommt, dass sich Teile der Ladung rückwärts in der Zeit bewegen (siehe Abbildung 1). Dies ist eigentlich nicht überraschend, da stets eine *starre* Ladungsverteilung angenommen wurde. Es wird also nicht-lokale Mechanik von starren Körpern mit vierdimensionaler

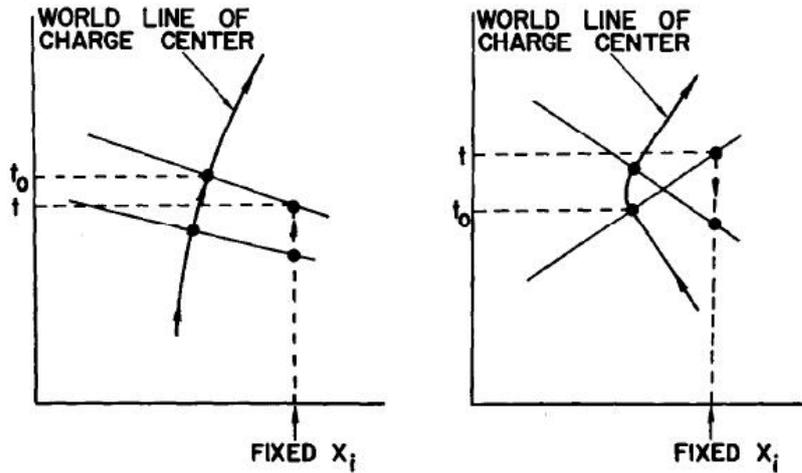


Abbildung 1: Auf der linken Seite bewegt sich das Ladungselement  $x_i$  vorwärts in der Zeit, auf der rechten Seite ist die Beschleunigung genügend groß, sodass es sich rückwärts in der Zeit bewegt.

Beschreibung von Bewegungen verknüpft und es kommt zu einem akausalen Überlapp, das heißt, dass sich ein einzelnes Objekt zu verschiedenen Zeiten an demselben Raumzeit-Punkt aufhält.

Die Annahme des starren Elektrons fallen zu lassen, ist schwerlich möglich, denn experimentell lässt sich keine andere Struktur des Elektrons feststellen. Ein solcher weicher Körper würde sich bei Beschleunigungen verformen und zu oszillieren beginnen. Dass dies bei Streuversuchen übersehen worden sein könnte, ist sehr unwahrscheinlich. Jede klassische Theorie betrachtet das Elektron ohnehin als Elementarteilchen ohne innere Struktur. Sollte sich das als falsch erweisen und eine Theorie gefunden werden, die korrekt eine innere Struktur postuliert, sollte dennoch jede klassische Theorie des Elektrons in der Lage sein, mit Punktteilchen umgehen zu können, da eine obere Grenze des Elektronenradius' bei  $10^{22}$  m liegt. So konnten in der Entwicklung der Selbstwechselwirkungskraft (10) höhere Terme vernachlässigt werden, gerade weil die Vorstellung eines strukturlosen, extrem kleinen, wenn nicht sogar punktförmigen Elektrons zugrunde liegt. Wäre dies nicht der Fall und man würde immer höhere Geschwindigkeiten betrachten, müsste man auch die Abhängigkeit der Masse des Teilchens von der Geschwindigkeit beachten. Wie diese aber genau aussieht, kann ohne Wissen über die Struktur bzw. Gestalt des Elektrons nicht gesagt werden [Fre25]. Man würde eine unnötige Willkürlichkeit in die Theorie einführen, die auch noch eine Tatsache betrifft, die gar kein Problem für die Theorie, die ja eine klassische ist, darstellen sollte.

Wie sieht es aus, wenn man die Schönheit der Theorie bewahrt und von Punktteilchen ausgeht? Nun, dann ist sie mathematisch schlicht nicht definiert. Die Lösungen der Maxwell-Gleichungen sind Felder, deren Stärke sich wie der reziproke Abstand zur Quelle verhält. Jetzt ist man aber genau an

der Stärke des Feldes am Ort der Quelle interessiert, an welchem diese nicht definiert ist. Man wird gezwungen, sich mit dieser Divergenz auseinander zu setzen.

Dies geschieht in der Regel durch Massenrenormierung. In der Herleitung der Lorentz-Dirac-Gleichung nach Lorentz betrachtet man dazu die Gleichung (11) und hier besonders den Term  $m_0 + \frac{4}{3c^2} \frac{e^2}{2r}$ . Bei einem Punktteilchen ist der Grenzprozess  $r \rightarrow 0$  nötig, was wiederum bedeutet, dass  $m_0$  immer so gewählt werden muss, dass der ganze Ausdruck der experimentellen Masse des Elektrons entspricht. Für genügend kleine Radien muss  $m_0$  also zuerst immer kleiner, dann negativ und schließlich negativ unendlich werden. Sieht man einmal von der allgemeinen Problematik ab, von unendlich unendlich abzuziehen, um einen finiten Wert zu erhalten, gibt es immer noch Grund genug, diese Methode abzulehnen. In der Herleitung beginnt man damit, in der Lorentz-Gleichung (2) die Ladungs- und Stromdichte zu entwickeln. In der Newtonschen Mechanik ist es nun aber so, dass der Koeffizient der zweiten Ableitung des Ortes nach der Zeit der *gesamte* Trägheitskoeffizient ist, genauer: die experimentelle Masse des betrachteten Teilchens. In der ersten Herleitung, die auch Newtonsch ist, kann das nicht mehr gesagt werden. Ganz im Gegenteil, der Koeffizient von  $\ddot{\mathbf{r}}$  muss sogar negativ gewählt werden, kann also gar keine Trägheit ausdrücken und hat keine physikalische Signifikanz. In der Literatur wird  $m_0$  als *bare mass* oder nackte Masse und der andere Anteil als elektromagnetische Masse bezeichnet.

In Diracs Herleitung besteht dieses Problem in der Form nicht, da er eine eigenständige Bewegungsgleichung aufstellt und explizit auf den Gebrauch der Lorentz-Gleichung verzichtet. Aber auch er kommt ohne Massenrenormierung nicht aus (siehe dazu die Relationen (19) und (20)) und muss die mathematisch nicht definierte Differenz aus Unendlich und Unendlich benutzen, was Feynman als *dippy process* [Fey85] bezeichnet. Dies ist ganz natürlich, denn es werden Punktteilchen im Zusammenhang mit Selbstwechselwirkung betrachtet.

## 3.2 Lösungen der Lorentz-Dirac-Gleichung

Die Lorentz-Dirac-Gleichung ist eine Bewegungsgleichung mit einer Besonderheit: Sie beinhaltet die dritte Ableitung des Ortes nach der Zeit. Als Konsequenz hieraus erhält man ganz spezielle Lösungen, die nun genauer betrachtet werden. Zunächst stellt man fest, dass Lösungen von (23) der tatsächlich beobachteten Bewegungen entsprechen. Dies war Voraussetzung in Abschnitt 2.2. Aus Konsistenzgründen sollte bei Abwesenheit eines äußeren Feldes keine Dämpfung auftreten, die einzige Lösung sollte also  $\ddot{\mathbf{z}} = 0$  sein. Doch dies ist nicht der Fall. [Dir38][Bar80]

Um dies zu sehen, betrachtet man (23) ohne externes Feld, d.h.  $F_{in}^{\mu\nu} = 0$

in einer Dimension, also

$$\tau \ddot{x} - \ddot{x} - \dot{x} (\dot{t}^2 - \dot{x}^2) = 0, \quad (27)$$

$$\tau \dot{t} - \dot{t} - \dot{x} (\dot{t}^2 - \dot{x}^2) = 0, \quad (28)$$

wobei  $x = z^1$ ,  $t = z^0$  und  $\tau = \frac{3m}{2e^2}$  ist. Diese beiden Gleichungen sind äquivalent, denn  $(27) \cdot \dot{x} - (28) \cdot \dot{t} = 0$ , da die schon weiter oben verwendeten Identitäten  $\dot{z}_\alpha \dot{z}^\alpha = 1$ ,  $\dot{z}_\mu \dot{z}^\mu = 0$  und  $\dot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha = -\ddot{z}_\alpha \dot{z}^\alpha$  zu

$$\dot{t}^2 - \dot{x}^2 = 1, \quad (29)$$

$$\ddot{t} - \dot{x} \ddot{x} = 0 \text{ und} \quad (30)$$

$$(\dot{t} \ddot{t} - \dot{x} \ddot{x}) + (\dot{t}^2 - \dot{x}^2) = 0$$

werden. Aus (29) und (30) kann man  $\dot{t}$  eliminieren und erhält

$$\ddot{t} = \frac{\dot{x} \ddot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}.$$

Eingesetzt in (27) und unter der Voraussetzung, dass  $\ddot{x} \neq 0$ , ergibt das

$$\tau - \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} + \frac{\dot{x} \ddot{x}}{1 + \dot{x}^2} = 0.$$

Dies kann man über die Eigenzeit  $s$  integrieren und erhält

$$\tau s - \log \dot{x} + \frac{1}{2} \log (1 + \dot{x}^2) = A.$$

Für die Integrationskonstante  $A$  wählt man bequemerweise  $A = -\log \tau$ , was nun

$$\frac{\ddot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \tau e^{\tau s}$$

ergibt. Erneutes Integrieren liefert

$$\log \left( \sqrt{1 + \dot{x}^2} + \dot{x} \right) = e^{\tau s} + B.$$

Dies löst man nach  $\dot{x}$  und, mittels (29), nach  $\dot{t}$  auf:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sinh (e^{\tau s} + B), \\ \dot{t} &= \cosh (e^{\tau s} + B). \end{aligned} \quad (31)$$

Aus diesen Ergebnissen sieht man sofort, dass für  $s \rightarrow -\infty$   $\dot{x} = \sinh B$  wird, bzw. im Laborsystem  $\frac{dx}{dt} = \tanh B$ . Für  $s \rightarrow \infty$  hingegen wächst  $\dot{x}$  über alle Grenzen und die Geschwindigkeit im Laborsystem nähert sich der Lichtgeschwindigkeit, weil  $\frac{dx}{dt} = \tanh (e^{\tau s} + B) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1$ , also in normalen Einheiten  $c$ , ist. Ohne äußere Kräfte wird das Elektron nach (23) also schneller

und schneller, was jedoch nicht der Beobachtung entspricht und dem Trägheitssatz bzw. Newtons erstem Axiom widerspricht. Dies ist die sogenannte *runaway-solution*. Bedenkt man, dass man eine Gleichung ausgewertet hat, bei deren Herleitung Massen renormiert wurden, ist dieses Ergebnis einordbar: Es ist die Konsequenz der Annahme einer negativen Masse.

Nicht alle Lösungen jedoch weisen dieses *runaway*-Verhalten auf. Denn da (23) eine Dreipunktgleichung ist, d.h. eine dritte Ableitung des Ortes nach der Zeit enthält, wird auch noch  $\ddot{z}(0)$  als Anfangsbedingung benötigt. Damit dies nicht willkürlich geschieht, fordert man, dass das Elektron nur beschleunigt werden kann, solange auch Kräfte auf dieses einwirken, und formt (23) in eine Integrodifferential-Gleichung um. Das entspricht einer asymptotischen Randbedingung  $\ddot{z} = 0$  bei  $s \rightarrow \infty$ . Dazu multipliziert man die Bewegungsgleichung

$$\frac{\ddot{z}^\mu}{\tau} = \ddot{z}^\mu + \ddot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha \dot{z}^\mu, \quad \tau = \frac{3m}{2e^2}, \quad (32)$$

auf beiden Seiten mit  $e^{-s/\tau}$  und erhält

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} e^{-s/\tau} \ddot{z}^\mu - e^{-s/\tau} \ddot{z}^\mu &= e^{-s/\tau} \ddot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha \dot{z}^\mu, \\ -\frac{d}{ds} (e^{-s/\tau} \ddot{z}^\mu) &= e^{-s/\tau} \ddot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha \dot{z}^\mu. \end{aligned}$$

In dieser Form kann man nun über die Eigenzeit  $s$  integrieren und erhält

$$e^{-s/\tau} \ddot{z}^\mu = - \int_0^s e^{-s'/\tau} \ddot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha(s') \dot{z}^\mu(s') ds' + \ddot{z}^\mu(0). \quad (33)$$

Um die Integrationskonstante  $\ddot{z}^\mu(0)$  zu bestimmen, beschränkt man sich auf Beschleunigungen, die langsamer als exponentiell anwachsen. Dies ist der entscheidende Schritt, um die Dreipunktgleichung in eine Zweipunktgleichung umzuwandeln. Durch diese asymptotische Bedingung wird für  $s \rightarrow \infty$  die linke Seite von (33) gleich 0 und es ergibt sich

$$\ddot{z}^\mu(0) = \int_0^\infty e^{-s'/\tau} \ddot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha(s') \dot{z}^\mu(s') ds',$$

weshalb (23) in Form einer Integrodifferential-Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$\ddot{z}^\mu(s) = e^{s/\tau} \int_s^\infty e^{-s'/\tau} \ddot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha(s') \dot{z}^\mu(s') ds'. \quad (34)$$

Lösungen dieser Gleichung lösen auch (32). Andersherum hingegen gilt das nicht: Die *runaway-solution* lässt das Integral in (34) unendlich werden und löst also nicht die Integrodifferential-Gleichung.

Aber auch (34) ist noch nicht frei von Besonderheiten. Dies wird deutlich, wenn man unter dem Integral die Variablensubstitution  $a = s' - s$  vornimmt:

$$\ddot{z}^\mu(s) = \int_0^\infty e^{-a/\tau} \ddot{z}_\alpha \ddot{z}^\alpha(a+s) \dot{z}^\mu(a+s) da.$$

Jetzt sieht man sofort, dass die Bewegung zum Zeitpunkt  $s = 0$  durch die Kraft zu allen Zeitpunkten  $t \geq s$  bestimmt wird. Das bedeutet, dass wenn für einen Zeitpunkt  $s < s_0$  die Kraft zwar verschwindet, die Beschleunigung trotzdem ungleich null ist. Diese Tatsache, die Newtons drittem Axiom *actio gleich reactio* widerspricht, wird *pre-acceleration* genannt. Diese Besonderheit ist jedoch nicht beobachtbar, da die *pre-acceleration* um  $1/\tau \approx 6,27 \cdot 10^{-21}$  Sekunden früher stattfindet. Von einem makroskopischen Standpunkt aus ist *pre-acceleration* demnach kein Widerspruch zu der Vorstellung, dass, wie in der Hamiltonschen Mechanik durch einen Fluss auf dem Phasenraum, die zukünftige Entwicklung eines Systems durch die Vergangenheit festgelegt ist, was man Kausalität nennen kann. Mikroskopisch hingegen bricht diese Kausalität zusammen.

Nun muss man sich fragen, ob die soweit dargestellten Aspekte der Theorie der Selbstwechselwirkung in der klassischen Elektrodynamik zufriedenstellend sind. Diese Frage muss mit Nein beantwortet werden. Betrachtet man Punktteilchen, wozu man durch sehr gute Argumente geleitet wird, ist die Theorie nicht wohldefiniert und man ist gezwungen, die divergente Selbstenergie des Teilchens zu renormieren. Dass man hierbei von einer unendlich großen Größe eine ebenfalls unendliche abzieht, um eine endliche zu erhalten, ist ein untrügliches Zeichen dafür, dass die klassische Elektrodynamik in der Form *nicht* in der Lage ist, Selbstwechselwirkung vollständig zu beschreiben. Wird hingegen das Modell einer ausgedehnten Ladungsverteilung betrachtet, wird man sofort damit konfrontiert, dass diese nicht Lorentz-invariant ist und man somit auch dann nicht in der Position ist, eine zufriedenstellende Theorie des Elektrons aufgestellt zu haben. Hinzu kommen natürlich die unphysikalischen *runaway-solutions* (31), welche ein Artefakt der Massenrenormierung sind, und das Auftreten von *pre-acceleration*, das vor dem Hintergrund der klassischen Elektrodynamik nicht einleuchtend ist. Eine weitaus befriedigendere Theorie wird im nächsten Kapitel vorgestellt: Elektromagnetismus nach Wheeler und Feynman. Deren Theorie beinhaltet die erwünschte Punktförmigkeit der Teilchen, ohne jedoch Massenrenormierung vornehmen zu müssen.

## 4 Strahlungsdämpfung im Elektromagnetismus nach Wheeler-Feynman

Aus den Abschnitten bisher wird klar, dass die Schwierigkeiten der Maxwell-Lorentz-Theorie mit der Selbstwechselwirkung, also die divergente Selbst-

energie, sehr eng mit den Feldern, die die Maxwell-Gleichungen lösen, verknüpft sind. Felder wurden eingeführt, um Wechselwirkung zwischen den Teilchen zu vermitteln. Doch das ist nicht die einzige Möglichkeit für Wechselwirkung: Teilchen können auch direkt miteinander wechselwirken, die Elemente, die Probleme verursachen, Felder und Selbstwechselwirkung, gäbe es dann also nicht mehr. Dieses Konzept heißt *action-at-a-distance* bzw. Fernwirkung. Dass ein solcher Elektromagnetismus ohne Felder in der Lage ist, alle elektromagnetischen Phänomene zu erklären, einschließlich der Strahlungsdämpfung, zeigten John A. Wheeler und Richard P. Feynman [WF45][WF49]. Die Idee der Fernwirkung reicht jedoch weiter zurück, bis auf Gauß, Schwarzschild, Tetrode und Fokker, die allerdings gerade die Strahlungsdämpfung nicht in eine *action-at-a-distance*-Theorie einbauen konnten.

## 4.1 Die Theorie

Mit Fernwirkung ist nicht instantan übertragene Wirkung gemeint, wie etwa in der Newtonschen Mechanik. Die direkte Wechselwirkung von Teilchen miteinander findet auch verzögert statt, und zwar genau um das Zeitintervall, welches das Licht benötigt, um die Distanz zwischen den Teilchen mit den Weltlinien  $z_i$  und  $z_j$  zu überbrücken, für Wechselwirkung muss also gelten  $(z_i^\mu - z_j^\mu)(z_{i\mu} - z_{j\mu}) = (x_i - x_j)^2 = 0$ . Dadurch ist die Theorie relativistisch invariant. In einem Minkowski-Diagramm heißt dies, dass ein Teilchen mit

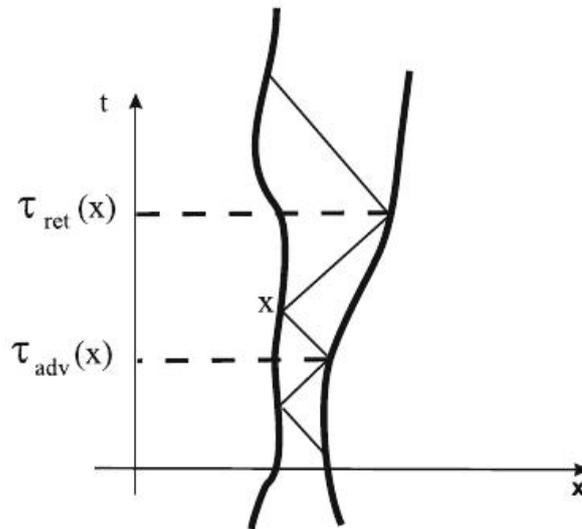


Abbildung 2: Das Teilchen mit der linken Weltlinie wechselwirkt mit dem auf der rechten Seite genau zu den Zeitpunkten, an welchen die rechte Trajektorie Vorwärts- und Rückwärts-Kegel des linken Teilchens schneidet.

allen anderen Teilchen wechselwirken kann, deren Trajektorien den Vorwärts- oder den Rückwärts-Kegel des betrachteten Teilchens schneiden. Der Grund dafür, dass auch der Rückwärts-Kegel beachtet wird, ist die zentrale Stellung

der Symmetrie eines physikalischen Gesetzes unter Zeitumkehr, welche also auch in der Dynamik beachtet werden muss.

Ausgehend vom Wirkungsprinzip für Fernwirkung von Schwarzschild, Tetrode und Fokker für Teilchen mit Massen  $m_i$  und Ladungen  $e_i$

$$0 \stackrel{!}{=} \delta J = \delta \left\{ - \sum_i \left[ m_i \int \sqrt{\dot{z}_i^\mu \dot{z}_{j\mu}} d\lambda_i - \sum_{j>i} e_i e_j \int \int \delta((z_i - z_j)^2) \dot{z}_i^\mu \dot{z}_{j\mu} d\lambda_i d\lambda_j \right] \right\},$$

wobei  $\lambda_i$  Parameter der Weltlinie ist und  $\dot{z}_i = dz_i/d\lambda_i$ , werden zunächst die Euler-Lagrange-Gleichungen bzw. die Bewegungsgleichung für das  $i$ -te Teilchen mittels Variationsrechnung abgeleitet. Man erhält

$$m_i \ddot{z}_i^\mu = e_i \left[ \sum_{j, i \neq j} \int e_j \left( \dot{z}_j^\nu \frac{\partial}{\partial z_i^\mu} - \dot{z}_j^\mu \frac{\partial}{\partial z_i^\nu} \right) \delta((z_i - z_j)^2) d\lambda_j \right] \dot{z}_{i\nu}.$$

Setzt man nun noch

$$A_j^\mu(x) = e_j \int \dot{z}_j^\mu \delta((x - z_j)^2) d\lambda_j$$

beziehungsweise

$$\tilde{A}^\mu(x) = \sum_{j, i \neq j} e_j \int \dot{z}_j^\mu \delta((x - z_j)^2) d\lambda_j \quad (35)$$

als das Potential aller  $j$  Teilchen bis auf das  $i$ -te unter Beobachtung, ergibt sich analog zu den Potentialen mittels der üblichen Definition des Feldstärketensors  $F_j^{\mu\nu}$  bzw.  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  (6) folgende Bewegungsgleichung:

$$m_i \ddot{z}_i^\mu = e_i \sum_{j, i \neq j} F_j^{\mu\nu}(z_i) \dot{z}_{i\nu} = e_i \tilde{F}^{\mu\nu}(z_i) \dot{z}_{i\nu}, \quad (36)$$

die der Bewegungsgleichung (7) aus der klassischen Elektrodynamik mit einem Potential gegeben durch (35) entspricht. Dieses Potential löst sowohl die Maxwell-Gleichungen (5) als es auch der Lorenzgleichung  $\partial_\mu A^\mu = 0$  genügt. Klassische Elektrodynamik und Wheeler-Feynman-Elektromagnetismus stimmen also in ihren Grundgleichungen überein, mit dem einzigen, aber wesentlichen Unterschied, dass der Selbstwechselwirkungsterm  $i = j$  im Wheeler-Feynman-Elektromagnetismus ausgeschlossen ist, was durch die Schreibweise  $\tilde{F}$  angedeutet wird. Besonders zu beachten ist hierbei, dass wegen

$$\delta((x - y)^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta((x^0 - y^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{\delta((x^0 - y^0) + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)$$

auch folgende Zerlegung des Potentials bzw. des Feldstärketensors gilt:

$$A^\mu = \frac{1}{2}(A_{ret}^\mu + A_{adv}^\mu) \quad \text{und} \quad F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{ret}^{\mu\nu} + F_{adv}^{\mu\nu}) . \quad (37)$$

Das spiegelt die Forderung wider, dass direkte Wechselwirkung zwischen Teilchen sowohl retardiert als auch avanciert stattfindet, was in der klassischen Elektrodynamik nur eine Möglichkeit ist, welche die Gleichungen erlauben. Die Bewegung eines Teilchens wird durch die Superposition der „Felder“ aller *anderen* Teilchen bestimmt, nicht jedoch durch sein eigenes. Eine Wechselwirkung des Teilchens mit sich selbst gibt es nicht. Das Potential (35) bzw.  $F^{\mu\nu}$  sind nicht als Felder zu denken, mit eigenen Freiheitsgraden ausgestattet, sondern vielmehr als Vorschrift, wie die Wechselwirkung an einem bestimmten Raumzeit-Punkt zu erfolgen hat.<sup>4</sup> Folglich kann es auch von vorneherein keine unendliche Selbstenergie geben. Dies bedeutet aber auch, dass ein Elektron im ladungsfreien Raum, z.B. durch Gravitation beschleunigt, nicht abstrahlen kann. Nun wird aber Strahlungsdämpfung beobachtet. Wie dies innerhalb des Wheeler-Feynman-Elektromagnetismus ohne Selbstwechselwirkung erklärt werden kann, ist die Leistung von Wheeler und vor allem Feynman. [WF49][Bar80][DT09]

## 4.2 Strahlungsdämpfung

Da Selbstwechselwirkung explizit ausgeschlossen wird, kann eine im ladungsfreien Raum beschleunigte Ladung auch nicht durch Abstrahlung gedämpft werden. Also kann nur Strahlungsdämpfung auftreten, wenn noch andere Ladungen zugegen sind, die diese Strahlung dann absorbieren. Von Tetrode stammt die Idee, dass sogar nur dann Strahlung auftreten kann, wenn diese auch einen Empfänger, den Absorber, hat, der diese vollständig absorbiert. Diese Idee wird nun auch von Wheeler und Feynman in ihre Theorie aufgenommen. Untersucht man also Strahlung, besteht das System, welches betrachtet wird, immer sowohl aus Abstrahler als auch aus Absorber. Genau diese Tatsache ist nun, in Kombination mit der Forderung an die Wechselwirkung, immer retardierte und avancierte Teile zu besitzen, für die Strahlungsdämpfung verantwortlich. Anschaulich funktioniert dies folgendermaßen. Man betrachtet ein System, bestehend aus einem Elektron und dem Absorber. Dieser besteht aus geladenen Teilchen. Das Elektron wird z.B. durch eine Kollision oder Gravitation beschleunigt zur Strahlungsquelle. Die dadurch erzeugte retardierte Strahlung erreicht die Absorberteilchen zu der Zeit nach der Abstrahlung, die das Licht für den Abstand zum jeweiligen Teilchen benötigt. Dadurch werden die Absorberteilchen ebenfalls beschleunigt und zur Abstrahlung angeregt. Der avancierte Teil dieser Strahlung erreicht nun die Quelle wiederum genau zu dem Zeitpunkt, zu welchem diese zuerst abgestrahlt hat und bewirkt die Strahlungsdämpfung. In [WF45] wird gezeigt, dass die Strahlungsdämpfung unabhängig von den Eigenschaften des

---

<sup>4</sup>Wenn im Folgenden von „Feldern“ die Rede ist, dann immer in diesem Sinne.

Absorbers wie dessen Dichte oder Brechungsindex und der Geschwindigkeit der Quelle ist: In der Umgebung der Quelle wird von den Absorberteilchen immer das für die Strahlungsdämpfung richtige Feld

$$F_{rad} = \frac{1}{2} (F_{ret} - F_{adv})$$

erzeugt, welches in Superposition mit dem von der Quelle abgestrahlten Feld

$$F = \frac{1}{2} (F_{ret} + F_{adv})$$

gerade das beobachtete Feld, nämlich nur das retardierte, ergibt. Wie weiter oben schon gesagt, ist der Ausdruck von  $F_{rad}$  nicht singulär auf der Weltlinie des betrachteten Elektrons. Da er aber die Maxwell-Gleichungen löst, bedeutet dies, dass die Quelle dieses Feldes auch nicht auf der Weltlinie liegen kann. Denn genau dies drücken die Lösungen der Maxwell-Gleichungen aus: Das Feld ist am Ort seiner Quelle singulär. In der Absorbertheorie kann somit der Ursprung des Strahlungsfeldes von Dirac angegeben werden: Es ist der Absorber. Die Unabhängigkeit der Strahlungsdämpfung von der Beschaffenheit des Absorbers wurde schon angesprochen. Bedingung für Strahlungsdämpfung ist lediglich vollständige Absorption der Strahlung. Physikalisch bedeutet vollständige Absorption, dass eine Ladung außerhalb des Absorber-Mediums keine Störung erfährt, denn mögliche Strahlung von einzelnen Absorberteilchen wird sofort absorbiert, d.h. außerhalb des Absorbers gilt:

$$\sum_i (F_{ret}^i + F_{adv}^i) = 0.$$

Da sich  $F_{ret}^i$  und  $F_{adv}^i$  jeweils in unterschiedlichen Raumzeit-Regionen aufhalten – ersteres bewegt sich in der Zeit vorwärts, letzteres jedoch rückwärts –, ist destruktive Interferenz der beiden Summanden nicht möglich und das Verschwinden der Summe als Ganzes außerhalb des Absorbers impliziert somit auch das Verschwinden der einzelnen Summanden, also

$$\sum_i F_{ret}^i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_i F_{adv}^i = 0.$$

Damit folgt für den Bereich außerhalb des Absorbers sofort

$$\sum_i (F_{ret}^i - F_{adv}^i) = 0 \quad \text{außerhalb.}$$

Von diesem Ausdruck weiß man, dass er für keines der Teilchen singulär ist, d.h. er stellt eine Lösung der Maxwell-Gleichungen für den freien Raum dar und verschwindet also, weil er außerhalb des Absorbers gleich Null ist, auch innerhalb, d.h.

$$\sum_i (F_{ret}^i - F_{adv}^i) = 0 \quad \text{überall}$$

gilt. Diese Gleichung ist die Bedingung für vollständige Absorption. Für die Bewegungsgleichung des  $i$ -ten Teilchens mit Strahlungsdämpfungsterm setzt man nun (37) in (36) folgendermaßen ein:

$$m_i \ddot{z}_i^\mu = e_i \sum_{j, i \neq j} \frac{1}{2} (F_{j,ret}^{\mu\nu} + F_{j,adv}^{\mu\nu}) \dot{z}_{i\nu}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass  $\sum_{j, i \neq j} \frac{1}{2} (F_{j,ret}^{\mu\nu} + F_{j,adv}^{\mu\nu})$  die Summe über die Felder aller Teilchen ist, bis auf das der Testladung selbst, und sich noch weiter zerlegen lässt, nämlich in

$$\sum_{j, j \neq i} F_{ret}^j + \frac{1}{2} (F_{ret}^i - F_{adv}^i) - \frac{1}{2} \sum_j (F_{ret}^j - F_{adv}^j).$$

Der letzte Term ist eine Summe über alle Teilchen und, mit der Bedingung der vollständigen Absorption, gleich Null. Da der zweite Term durch (22) schon bekannt ist, nimmt die Bewegungsgleichung die bekannte Form der Lorentz-Dirac-Gleichung an:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{z}_i^\mu &= e_i \sum_{j, i \neq j} F_{j,ret}^{\mu\nu} \dot{z}_{i\nu} + \frac{2e_i^2}{3} (\dot{z}_i^\nu \ddot{z}_i^\mu - \ddot{z}_i^\nu \dot{z}_i^\mu) \dot{z}_{i\nu} \\ &= e_i F_{ext}^{\mu\nu} \dot{z}_{i\nu} + \frac{2e_i^2}{3} (\dot{z}_i^\mu + \ddot{z}_{i\alpha} \ddot{z}_i^\alpha \dot{z}_i^\mu), \end{aligned}$$

wobei  $\sum_{j, i \neq j} F_{j,ret}^{\mu\nu}$  dem externen Feld  $F_{ext}^{\mu\nu}$  entspricht, da der Summand  $i = j$  nicht vorkommt. [WF45]

### 4.3 Weiteres zum Wheeler-Feynman-Elektromagnetismus

Bis hierhin sind schon wichtige Ergebnisse zu verzeichnen: Der Wheeler-Feynman-Elektromagnetismus beschreibt alle elektromagnetischen Phänomene in gleicher Weise wie das die klassische Elektrodynamik tut. Schließlich können dort die meisten Anwendungen ohne Selbstwechselwirkung beschrieben und somit auch Punktteilchen betrachtet werden. Unter diesen Bedingungen benutzen Wheeler-Feynman und klassische Elektrodynamik exakt dieselben Gleichungen. Nur bei Betrachtung von Selbstwechselwirkung unterscheiden sich diese in signifikanter Weise, denn die Feldbeschreibung der klassischen Elektrodynamik führt, wenn man Punktteilchen betrachtet, zum divergenten Term der Selbstenergie, während Wheeler-Feynman Wechselwirkung ohne Felder beschreibt, speziell die Strahlungsdämpfung durch den Absorbermechanismus, und somit auch bei Betrachtung von Punktteilchen keine Divergenzen beinhaltet. Das bedeutet, dass Wheeler-Feynman nicht von der Problematik der Massenrenormierung aus Abschnitt 3.1 betroffen ist und natürlich auch nicht mit den Problemen, die ausgedehnte Ladungsverteilungen mit sich führen.

Die Besonderheiten der Lösungen der Lorentz-Dirac-Gleichung, also *pre-acceleration* und *runaway-solutions*, sind bei Wheeler-Feynman entweder nicht verwunderlich oder nicht vorhanden. Nicht verwunderlich ist *pre-acceleration*. Da nämlich Wechselwirkung von vorneherein retardiert und avanciert gedacht wird, sind Zukunft und Vergangenheit gegenseitig stark abhängig von einander. Genau dies wird durch *pre-acceleration* ausgedrückt. Diese Lösung ist also zwar da, passt jedoch bei Wheeler-Feynman sehr viel besser in die Theorie als in der klassischen Elektrodynamik. In logische Widersprüche à la Zeitreise in die Vergangenheit und beispielsweise Verhinderung seiner eigenen Zeugung kann man übrigens nicht geraten, da das System immer einer Dynamik gehorchen muss, zu welcher der Mensch und dessen Handlungen nicht gehören, avancierte Wechselwirkungen aber sehr wohl.<sup>5</sup> Schlicht nicht da sind die *runaway-solutions*. In 3.2 wurde nämlich ein Elektron ohne äußeres Feld betrachtet. In diesem Fall strahlt aber das Elektron bei Wheeler-Feynman gar nicht erst ab, da Selbstwechselwirkung ausgeschlossen ist. Somit ist dort die einzige Lösung für  $F_{ext} = 0$  auch  $\ddot{z} = 0$  bzw.  $\dot{z} = const$ .

Zu guter Letzt ist noch festzustellen, dass der Wheeler-Feynman-Elektromagnetismus auch in der Lage ist, den elektrodynamischen Zeitpfeil zu erklären, also einen Grund anzugeben, warum immer nur die retardierten Lösungen tatsächlich beobachtet werden können, obwohl die Dynamik invariant unter Zeitumkehr ist. Wie weiter oben schon gesagt, beruht diese Tatsache auf Überlegungen aus der statistischen Mechanik. Avancierte Lösungen entsprechen Wellen, die sich für einen Beobachter, der sich in einem Bezugssystem aufhält, dessen Parametrisierung der Zeit anwachsend ist – also die alltägliche Erfahrung, dass Zeit nur in Richtung Zukunft verläuft –, in entgegengesetzter Richtung der Parametrisierung bewegen, d.h. für den Beobachter rückwärts in der Zeit. Auf Abstrahlung übertragen heißt das, dass die Energie eines Teilchens für den Beobachter zunimmt, wenn dies in avancierten Wellen abstrahlt.

Betrachtet man nun analog zu dieser Situation einen Raum, in dessen einer Ecke Gas durch Begrenzungen festgehalten wird, stellt man fest, dass sich dieses, wenn man die Begrenzungen aufhebt, im ganzen Raum verteilt und sich nicht weiter in die Ecke drängt. Der Grund hierfür ist, dass die überwältigende Mehrheit der Anfangsbedingungen, die das Gas in der Ecke haben kann, so beschaffen ist, dass die Zeitentwicklung des Gases eben ein Verteilen im Raum bedeutet. Dieses Verhalten entspricht der Beobachtung von Abstrahlung retardierter Wellen. Der Beobachtung von Abstrahlung avancierter Wellen hingegen entspricht folgendes: Das Gas, im ganzen Raum verteilt, drängt komplett in eine Ecke. Für dieses Verhalten ist eine Anfangsbedingung notwendig, bei der z.B. die Zeiten, also Geschwindigkeiten aller Teilchen, welche sich aus einer Ecke heraus bewegt haben, einfach mit einem Minus versehen sind. Das Volumen für solches Verhalten im Phasenraum des Systems ist so extrem klein, dass man auf dessen Eintreten länger war-

---

<sup>5</sup>Eine ausführlichere Behandlung dieses Problems findet sich in [WF49].

ten müsste, als das Universum alt ist. In der Absorbertheorie überträgt die Quelle Strahlung auf sehr viele Teilchen im Absorber. Dieser Vorgang könnte auch in die andere Richtung stattfinden, also von der Art, dass der Absorber Strahlung auf die Quelle überträgt. Dazu müsste man jede einzelne Trajektorie der Absorberteilchen ein wenig korrigieren. Aufgrund der riesigen Anzahl der Absorberteilchen, typischerweise  $10^{23}$ , ist aber das Phasenraumvolumen für eben jene zwar leicht, aber in sehr spezieller Weise korrigierten Trajektorien wiederum so extrem klein, dass man dieses Verhalten nie beobachten kann.

Anders ausgedrückt stellt sich die Situation wie folgt dar: Trifft man auf ein System, welches sich typisch entwickelt – Gas im ganzen Raum verteilt bzw. Beobachtung von retardierten Wellen –, kann man mit an hundertprozentiger Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit sagen, dass sich das System aus einem spezielleren Zustand heraus entwickelt hat. Wäre das nicht so, würde sich Gas in einer Ecke sammeln und Teilchen durch Abstrahlung Energie aufnehmen. Für unsere alltägliche Wahrnehmung der einen einzigen Zeitrichtung sind also, bezüglich des Phasenraumvolumens des ganzen Systems, spezielle Anfangsbedingungen nötig, da das Phasenraumvolumen für eine Entwicklung in einen spezielleren Zustand so extrem klein ist, dass die Wahrscheinlichkeit für eine solche Entwicklung in einen spezielleren Zustand gegen Null tendiert. Somit haben Wheeler und Feynman das Problem des elektrodynamischen Zeitpfeils auf das Problem der Irreversibilität in der Thermodynamik zurückgeführt. [WF45][DT09][Fey67]

## 5 Schluss

Noch einmal alles zusammenfassend kann man also sagen, dass die klassische Elektrodynamik sich zwar für den Anwendungsbereich wunderbar eignet, aber es nicht vermag, Strahlungsdämpfung bzw. Selbstwechselwirkung des Elektrons zufriedenstellend zu beschreiben. Die Notwendigkeit zur Massenrenormierung und die unphysikalischen Lösungen sprechen eine deutliche Sprache. Deshalb muss man auch feststellen, dass klassische Elektrodynamik und Punktteilchen nicht kompatibel sind, sobald man Selbstwechselwirkung betrachtet. Aber auch ausgedehnte Ladungsverteilungen sind nicht tragfähig, da dann die Theorie ihre Lorentzinvarianz verlöre.

Im Elektromagnetismus nach Wheeler-Feynman hingegen ist eine echte Alternative gefunden. Beschreibung als Punktteilchen ohne Massenrenormierung, sogar eine Begründung für den elektrodynamischen Zeitpfeil sind hiermit möglich. Der oft vorgebrachte Vorwurf, Wheeler-Feynman sei aber nicht quantisierbar und deswegen auch schon im klassischen Regime nicht ernst zu nehmen, ist auch genau zu prüfen. Denn was genau Quantisierung heißt, ist nicht klar.

## Literatur

- [Bar80] Asim O. Barut. *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*. Dover, New York, 1980.
- [Dir38] Paul A. M. Dirac. Classical theory of radiating electrons. *Proc. Roy. Soc. London*, A167:148–169, 1938.
- [DT09] Detlef Dürr and Stefan Teufel. *Bohmian Mechanics – The Physics and Mathematics of Quantum Theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009.
- [ER09] Albert Einstein and Walter Ritz. Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems. *Physikalische Zeitschrift*, 10(9):323–324, 1909.
- [Fey67] Richard P. Feynman. *The Character of Physical Law*. The MIT Press, 1967.
- [Fey85] Richard P. Feynman. *QED: The Strange Theory of Light and Matter*. Princeton University Press, 1985.
- [Fey07] Richard P. Feynman. *Elektromagnetismus und Struktur der Materie*, volume II of *Feynman-Vorlesungen über Physik*. Oldenbourg Verlag, München Wien, fifth edition, 2007.
- [Fre25] J. Frenkel. Zur Elektrodynamik punktförmiger Elektronen. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 32(1):518–534, Dezember 1925.
- [Jac99] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, third edition, 1999.
- [Nod64] John S. Nodvik. A covariant formulation of classical electrodynamics. *Annals of Physics*, 28:225–319, 1964.
- [Poi06] Henri Poincaré. On the dynamics of the electron. *Rend. Circolo Mat. Palermo*, 21:129–176, 1906.
- [Roh97] Fritz Rohrlich. The dynamics of a charged sphere and the electron. *Am. J. Phys.*, 65(11):1051–1056, November 1997.
- [SS73] Harald Stumpf and Wolfgang Schuler. *Elektrodynamik*. Friedr. Vieweg + Sohn, Braunschweig, 1973.
- [WF45] John A. Wheeler and Richard P. Feynman. Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation. *Reviews of Modern Physics*, 17(2 and 3):157–181, 1945.

- [WF49] John A. Wheeler and Richard P. Feynman. Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):425–433, July 1949.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen verwendet habe.

München, den 21. Dezember 2010

Martin Oelker