Diplomarbeit in Physik

Formulierung der Theorie des zweitquantisierten elektromagnetischen Feldes im Schrödingerbild

von

Torben Krüger

12. November 2012

Betreut von Detlef Dürr

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Notationen

Wir wollen hier ein paar Notationen klären, die im Laufe dieser Arbeit ohne weitere Erklärung immer wieder auftauchen. Der Ausdruck „const" in Gleichungs- und Ungleichungsketten steht für eine generische Konstante, die sich von Zeile zu Zeile ändern kann. Hängt diese Konstante von Größen ab, die verändert werden können, so wird darauf durch die Notation „const(Variable)" oft explizit hingewiesen. Bei der Angabe linearer Operatoren wird häufig nur die Wirkung auf eine Basis oder eine totale Teilmenge von Vektoren angegeben. Diese Wirkung wird implizit als linear und stetig fortgesetzt verstanden. Ist diese Fortsetzbarkeit jedoch nicht selbstverständlich, so wird sie natürlich nach Definition des Operators bewiesen. Es kann außerdem vorkommen, dass zwischen Funktionsräumen bzw. Operatoren und den ihnen unter der Fouriertransformation entsprechenden Objekten nicht klar unterschieden wird. Die Notation $(Q\, f(\omega))[a]$, wobei Q eine quadratische Form, f eine Funktion, ω ein Operator und a ein Vektor ist, steht für $Q(a, f(\omega)a)$. Wenn in dieser Arbeit von einer Gaußschen Familie die Rede ist, so ist stets eine zentrierte Gaußsche Familie gemeint, d.h. eine Familie von Zufallsvariablen, die gemeinsam normalverteilt sind und alle verschwindenden Erwartungswert haben.

1.2 Einheitenkonvention

Da wir in dieser Arbeit ausschließlich an der mathematischen Analyse des Photonenfeldes interessiert sind, verwenden wir hier ein natürliches Einheitensystem, in dem alle für uns relevanten Naturkonstanten dimensionslos sind und den Zahlenwert 1 annehmen. Wir haben somit nur eine Basisgröße, nämlich unsere Einheitslänge, welche wir wie in der mathematischen Physik üblich als dimensionslose Zahl wählen. Das resultierende mechanische Einheitensystem, welches durch die Formeln „Energie $= mc^2 = \hbar\omega$" und „Kraft $= F = m\ddot{x}$" mit $c = \hbar = 1$ bestimmt wird, wird dann wie im Heaviside-Lorentz-Einheitensystem um die elektromagnetischen Einheiten erweitert, in dem das Coulombgesetz und das Faradaysche Induktionsgesetz die Form

$$F = \frac{1}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \text{und} \qquad \nabla \times E = -\partial_t B$$

annehmen. Die Maxwell-Gleichungen haben somit die in diesem System übliche Form.[1]

1.3 Warum eine Arbeit zum äußeren Stromproblem?

Die Quantenelektrodynamik (QED) ist eine der erfolgreichsten physikalischen Theorien unserer Zeit. Dieser oder ein ähnlicher Satz leitet viele Arbeiten und

[1] vergleiche Abschnitt 3.1

Lehrbücher zur QED ein. Tatsächlich hat der zu dieser Theorie gehörige Formalismus es ermöglicht, eine Vielzahl von Messergebnissen an elektromagnetisch wechselwirkenden mikroskopischen Systemen vorherzusagen. Der g-Faktor des Elektrons[2] und die Wirkungsquerschnitte fundamentaler Prozesse, wie z.B. er Comptenstreuung[3], sind nur ein Beispiel dafür. Auf theoretischer Ebene jedoch, hat diese Theorie eine Vielzahl von ungelösten Problemen. Einige davon sind so fundamental, dass es bis heute nach dem Wissen des Autors nicht gelungen ist, eine Dynamik für ein voll wechselwirkendes System aus Elektronen und elektromagnetischem Feld anzugeben. Derartige Schwierigkeiten sind aus der klassischen Elektrodynamik bereits bekannt. Dennoch erscheint es erstrebenswert, nicht nur einen streutheoretischen Formalismus für eine so grundlegende Theorie wie die QED anzugeben, sondern auch die zeitliche Entwicklung der zugrundeliegenden Objekte zu beschreiben. Insbesondere ist es problematisch die nichtrelativistische QED[4] oder auch die klassische Quantenmechanik als Grenzwerte einer Theorie zu verstehen, die selbst keine zeitliche Entwicklung von Zuständen beschreibt. Einen Hinweis auf das Aussehen einer vollständigen Kopplung von Teilchen und Wechselwirkungsfeld kann das Studium einfacherer Aspekte der Theorie liefern. So führte die Untersuchung externer Quellenprobleme etwa in der klassischen Elektrodynamik zu einem besseren Verständnis für die Bedeutung von Divergenzen im Punktteilchenlimit[5]. Mit externen Quellenproblemen sind in diesem Fall die Lorentzkraft bzw. die Maxwellgleichungen gemeint, in denen entweder das elektromagnetische Feld oder die Strom- und Ladungsverteilung als von außen gegeben und unveränderlich angenommen wird. In gleicher Weise lassen sich auch die analogen Probleme in der QED betrachten. Für das externe Feld-Problem gibt es funktionierende mathematische Modelle, welche bereits einige ausgefallene Ideen, wie etwa zeitlich veränderliche Fockräume[6] oder Renormierungen[7], erfordern, um eine wohldefinierte Dynamik zu erhalten. Das Gegenstück dazu, das externe Stromproblem, erscheint hingegen in der mathematischen Literatur nur wenig behandelt. Diese Arbeit stellt einige Ideen zusammen, die zur mathematischen Beschreibung und Lösung dieses Problems genutzt werden können.

1.4 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es für eine eingeschränkte Klasse von externen Strömen die Dynamik des zweitquantisierten elektromagnetischen Feldes in einer Version zu formulieren, die dem Schrödingerbild der Quantenmechanik entspricht. Wir lösen uns also von dem Teilchenbild, welches über einem Fockraum mit Auf- und Absteigeoperatoren arbeitet und geben eine Gleichung an, die wie die klassische Schrödingergleichung über einem L^2-Raum aufzustellen ist. Als Konfigurations-

[2] [13]
[3] [14]
[4] [15]
[5] [15]
[6] [11],[22]
[7] [16]

raum, auf dem diese Wellenfunktionen definiert sind, tritt nun jedoch anstelle der Orte von n Quantenteilchen der Raum der A-Feld-Konfigurationen. Um zu dieser Formulierung zu gelangen, wird uns der Harmonische Quantenoszillator unter dem Einfluss einer räumlich konstanten äußeren Kraft als Analogon dienen, welches wegen der Endlichdimensionalität weniger technische Schwierigkeiten aufweist. Ausgehend von dieser Formulierung wollen wir dann einen Pfadintegralformalismus einführen mit dessen Hilfe potentiell auch einfache wechselwirkende Spielzeug-Modelle aufgestellt werden können. Ein wichtiges Ziel ist dabei die Bestimmung der Regularitätsklasse des Pfadintegrals, da durch diese jene Materiemodelle bestimmt werden, die sich einfach durch Ausintegrieren aller Wege an das Photonenfeld koppeln lassen.

1.5 Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen bedanken, die während meines Studiums meine Faszination und mein Verständnis für Physik und damit das Wesen der Natur gefördert haben. Unter diesen besonders Dirk Deckert, Detlef Dürr und Martin Schottenloher, die mit ihrem Seminar mein Interesse an QED wecken konnten. Außerdem danke ich Franz Merkl, von dem die Idee für diese Arbeit stammt und ohne den sie nicht möglich gewesen wäre.

2 Koordinatenunabhängige Formulierung des n-dimensionalen Harmonischen Quantenoszillators

2.1 Setting des harmonischen Oszillators

Um ein gutes Verständnis für die Bewegungsgleichung des zweitquantisierten Photonenfeldes und die zugehörigen Lösungsstrategien zu bekommen, gehen wir zunächst vom n-dimensionalen Harmonischen Oszillator aus. Das Photonenfeld können wir uns als eine Art Harmonischen Quantenoszillator in unendlich vielen Dimensionen vorstellen und diese Sichtweise wird uns im gesamten Verlauf dieser Arbeit begleiten. Um jedoch den Übergang von endlich zu unendlich vielen Dimensionen und damit zum elektromagnetischen Feld zu erleichtern, werden wir bei der Formulierung der Gleichung des Harmonischen Oszillators auf einige Annahmen über Symmetrie und Schreibweisen in der Gleichung, die explizit von der Struktur des $\mathbb{R}^n$ Gebrauch machen, verzichten müssen. Insbesondere ist nach Wahl der kanonischen Basis $\mathbb{R}^n$ natürlich isomorph zu seinem Dualraum. Eine Eigenschaft, die in unendlich vielen Dimensionen sicher nicht mehr gilt.

Wir beginnen mit dem Konfigurationsraum V, hier ein n-dimensionaler Vektorraum, in dem die klassische Bewegung $(t \mapsto x(t) \in V)$ stattfindet und auf dem die quantenmechanische Wellenfunktion definiert wird. Wie beim Übergang vom klassischen Harmonischen Oszillator zur entsprechenden Quantentheorie üblich gehen wir von der Hamiltonschen Mechanik aus. Wir assoziieren den Dualraum V' von V mit dem Impulsraum. Die klassische Dynamik wird durch die auf dem Phasenraum definierte Hamiltonfunktion $H : \Gamma = V \times V' \longrightarrow \mathbb{R}$ bestimmt. Diese setzt sich für den freien Harmonischen Oszillator aus einem kinetischen, in den Impulsen quadratischen und einem potentiellen, in den Orten quadratischen Term zusammen. Da wir an der Kopplung des elektromagnetischen Feldes an einen externen Strom interessiert sind, müssen wir ein endlichdimensionales Analogon einführen. Diese Rolle übernimmt ein im Ort linearer Kopplungsterm in der Energie, der physikalisch einer räumlich konstanten äußeren Kraft entspricht. Ist also $m : V \times V \to \mathbb{R}$ oder $m : V \to V'$ eine positiv definite quadratische Form auf V und $\omega : V \to V$ invertierbar und bezüglich m symmetrisch und $f_t \in V'$, so ist

$$H(x,p) = \frac{1}{2} m^{-1}(p,p) + \frac{1}{2} m(x, \omega^2 x) + \langle f_t, x \rangle.$$

Im speziellen Fall $V = \mathbb{R}^n$, sowie $m(x,x) = \mu\, x \cdot x$ und $\omega(x) = \nu\, x$ mit $\mu, \nu > 0$ erhalten wir

$$H(x,p) = \frac{1}{2\mu}\, p \cdot p + \frac{1}{2} \mu\, \nu^2\, x \cdot x + f_t \cdot x.$$

Verschwindet die externe Kraft, so ergibt sich der übliche Harmonische Oszillator, der im Anhang A.1 noch einmal wiederholt wird.

2.2 Übergang zur Quantentheorie über $\mathbf{L^2(dx)}$

Für den harmonischen Oszillator auf $\mathbb{R}^n$ erhalten wir mittels kanonischer Quantisierung, also der Substitution $p \to -i\nabla$, die Schrödingergleichung:

$$\left(-\frac{1}{2\mu} \triangle + \frac{1}{2} \mu \nu^2\, x \cdot x + f_t \cdot x \right) \psi = i \partial_t \psi\,.$$

Nun besteht zwischen dem translationsinvarianten ∇ und dem bis auf eine multiplikative Konstante einzigen nichttrivialen translationsinvarianten Borelmaß dx auf $\mathbb{R}^n$ der durch partielle Integration sichtbare Zusammenhang, der zu der schwachen Formulierung der Gleichung

$$\int \left(\frac{1}{2\mu}\, \nabla\phi\, \nabla\psi + \frac{1}{2} \mu \nu^2\, x \cdot x \phi\, \psi + f_t \cdot x\, \phi\, \psi \right) dx = \int \phi\, i \partial_t \psi\, dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

führt. Für den allgemeinen Fall des Konfigurationsraumes V sollten wir der Tatsache, dass die Impulse Elemente des Dualraumes sind, dadurch Rechnung tragen, dass wir ∇ in der Schrödingergleichung durch die äußere Ableitung d ersetzen und erhalten somit:

$$\int \left(\frac{1}{2} m^{-1}(d\phi, d\psi) + \frac{1}{2} m(x, \omega^2 x)\, \phi\, \psi + \langle f_t, x \rangle\, \phi\, \psi \right) dx = \int \phi\, i \partial_t \psi\, dx$$

$$\forall \phi \in C_0^\infty(V)$$

Wobei dx auch hier ein nichttriviales translationsinvariantes Borelmaß auf V ist.

2.3 Formulierung auf $\mathbf{L^2}(\mathrm{dP})$

Bei dem Versuch die obige Gleichung auf den Fall des elektromagnetischen Feldes zu verallgemeinern ergibt sich ein fundamentales Problem. Ein Analogon zu dx existiert in einem unendlichdimensionalen Vektorraum nicht. Auch in unendlich vielen Dimensionen existieren jedoch nichttriviale Wahrscheinlichkeitsmaße. Um ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf V zu finden, betrachten wir den Grundzustand des freien Harmonischen Quantenoszillators

$$\psi_{GZ}(x) = \alpha e^{-\frac{1}{2}m(x,\omega x)}, \quad \alpha > 0 \quad \text{mit} \quad \int |\psi_{GZ}|^2 \, dx = 1.$$

Mit dieser Grundzustandswellenfunktion lässt sich $dP = |\psi_{GZ}|^2 \, dx$ definieren. Mit Hilfe des isometrischen Isomorphismus

$$U : L^2(V, dP) \to L^2(V, dx), u \mapsto u \, \psi_{GZ}$$

lässt sich die Bewegungsgleichung auf $L^2(dP)$ formulieren:

$$E\left[\frac{1}{2}m^{-1}(dv, du) + \left(\frac{1}{2}Tr(\omega) + \langle f_t, \cdot\rangle\right) u \, v\right] = E\left[v \, i\partial_t u\right] \quad \forall v \in C_0^\infty(V) \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet d weiterhin die äußere Ableitung, die im folgenden Abschnitt eine Interpretation als stochastische Ableitung erhält.

2.4 Auswertungsfunktionale als Gaußsche Familie und Fockraumformulierung

Wir wollen nun eine Verbindung zwischen der Gleichung (1), formuliert über $L^2(dP)$, und der Gleichung des Harmonischen Oszillators im Teilchenbild über einem klassischen bosonischen Fockraum der Form $\bigoplus_{k=0}^\infty W^{\tilde{\otimes} k}$ herstellen.[8] Hierfür stellen wir zunächst fest, dass für $p \in V'$ das zugehörige Auswertungsfunktional ein Element von $L^2(V, dP)$ ist. Tatsächlich bilden die Auswertungsfunktionale

$$(\langle p, \cdot\rangle : p \in V')$$

eine Gaußsche Familie auf $(V, \mathcal{B}(V), P)$ mit Kovarianz

$$E[\langle p, \cdot\rangle\langle q, \cdot\rangle] = \int \langle p, x\rangle\langle q, x\rangle \, |\psi_{GZ}(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2}(m\omega)^{-1}(p, q),$$

wobei $m\omega : V \times V \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto m(x, \omega y)$ ist. Wir definieren die Kovarianzmatrix als quadratische Form $Q := \frac{1}{2}(m\omega)^{-1}$. Somit ist (V', Q) ein Hilbertraum und nach A.2 ist $L^2(V, dP)$ natürlich isomorph zu $\bigoplus_{k=0}^\infty (V')^{\tilde{\otimes}_Q k}$. Wir führen nun die üblichen Auf- und Absteigeoperatoren ein. Seien dazu

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k^*(p) :&(V')^{\otimes k} \to (V')^{\otimes k+1}, \\ &p_1 \otimes \cdots \otimes p_m \mapsto \frac{1}{\sqrt{k+1}} \sum_{j=0}^{k} p_1 \otimes \cdots \otimes p_j \otimes p \otimes p_{j+1} \otimes \cdots \otimes p_k \end{aligned}$$

[8] vergleiche A.2

für jedes $p \in V'$, sowie

$$\tilde{a}_k(x) : (V')^{\otimes k} \to (V')^{\otimes k-1}, p_1 \otimes \cdots \otimes p_k \mapsto \sqrt{k}\langle p_1, x\rangle p_2 \otimes \cdots \otimes p_k$$

für $x \in V$. Dann liefern die Einschränkungen von $\tilde{a}^*(p) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k^*(p)$ und $\tilde{a}(x) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(p)$ auf $\bigoplus_{k=0}^{\infty} (V')^{\tilde{\otimes} k}$ die Auf- und Absteigeoperatoren $a^*(p)$ und $a(x)$, für welche die Kommutatorrelation $[a(x), a^*(p)] = \langle p, x\rangle$ gilt.

Wir wollen nun genauer untersuchen, wie sich diese Operatoren in der L^2-Darstellung des Fockraumes verhalten. Ist $(e_j)_{j=1}^n$ eine Orthonormalbasis von (V', Q), so hat der Isomorphismus, der zwischen den beiden Darstellungen wechselt, folgende Form:

$$F = \bigoplus_{k=0}^{\infty} F_k : \bigoplus_{k=0}^{\infty} (V')^{\tilde{\otimes} k} \to L^2(V, dP)$$

mit

$$F_k : (V')^{\tilde{\otimes} k} \to \mathcal{H}_k,\ \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \prod_{j=1}^n a^*(e_j)^{\alpha_j} \left|0\right\rangle \mapsto \sqrt{\alpha!} \prod_{j=1}^n H_{\alpha_j}(\langle e_j, \cdot\rangle),$$

wobei $\mathcal{H}_k$ das k-te Wienerchaos, H_{α_j} das α_j-te Hermitepolynom und α ein Multiindex mit $|\alpha| = k$ ist. Berechnen wir nun also zunächst $Fa(x)F^{-1}$ und dann $Fa^*(p)F^{-1}$.

$$\begin{aligned}
&Fa(Q(e_l, \cdot))F^{-1}\sqrt{\alpha!} \prod_{j=1}^n H_{\alpha_j}(\langle e_j, \cdot\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} F_{k-1} a(Q(e_l, \cdot)) \prod_{j=1}^n a^*(e_j)^{\alpha_j} \left|0\right\rangle \\
&= \frac{\alpha_l}{\sqrt{\alpha!}} F_{k-1} \left(\prod_{j=1}^{l-1} a^*(e_j)^{\alpha_j} \right) a^*(e_l)^{\alpha_l - 1} \prod_{j=l+1}^{n} a^*(e_j)^{\alpha_j} \left|0\right\rangle \\
&= \sqrt{\alpha!} \left(\prod_{j=1}^{l-1} H_{\alpha_j}(\langle e_j, \cdot\rangle) \right) \underbrace{H_{\alpha_l - 1}(\langle e_l, \cdot\rangle)}_{H'_{\alpha_l}(\langle e_l, \cdot\rangle)} \prod_{j=l+1}^{n} H_{\alpha_j}(\langle e_j, \cdot\rangle) \\
&= Q(e_l, D\left(\sqrt{\alpha!} \prod_{j=1}^n H_{\alpha_j}(\langle e_j, \cdot\rangle) \right))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&Fa^*(e_l)F^{-1}\sqrt{\alpha!}\prod_{j=1}^{n} H_{\alpha_j}(\langle e_j,\cdot\rangle)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha!}}F_{k+1}a^*(e_l)\prod_{j=1}^{n} a^*(e_j)^{\alpha_j}\,|0\rangle\\
&= \sqrt{\alpha_l+1}F_{k+1}\frac{1}{\sqrt{\alpha!}\sqrt{\alpha_l+1}}\left(\prod_{j=1}^{l-1} a^*(e_j)^{\alpha_j}\right)a^*(e_l)^{\alpha_l+1}\prod_{j=l+1}^{n} a^*(e_j)^{\alpha_j}\,|0\rangle\\
&= \sqrt{\alpha!}\left(\prod_{j=1}^{l-1} H_{\alpha_j}(\langle e_j,\cdot\rangle)\right)\underbrace{(\alpha_l+1)H_{\alpha_l+1}(\langle e_l,\cdot\rangle)}_{\langle e_l,\cdot\rangle H_{\alpha_l}(\langle e_l,\cdot\rangle)-H_{\alpha_l-1}(\langle e_l,\cdot\rangle)}\prod_{j=l+1}^{n} H_{\alpha_j}(\langle e_j,\cdot\rangle)\\
&= \langle e_l,\cdot\rangle\sqrt{\alpha!}\prod_{j=1}^{n} H_{\alpha_j}(\langle e_j,\cdot\rangle)-Fa(Q(e_l,\cdot))F^{-1}\sqrt{\alpha!}\prod_{j=1}^{n} H_{\alpha_j}(\langle e_j,\cdot\rangle)
\end{aligned}
$$

Hierbei bezeichnet D die im Appendix A.3 eingeführte Malliavin-Ableitung und wir haben die Eigenschaften der Hermitepolynome aus A.2 benutzt. Insgesamt ergibt sich also:

$$
Fa(x)F^{-1}=\langle D\bullet,x\rangle \quad , \quad Fa^*(p)F^{-1}=\langle p,\cdot\rangle\ \bullet -Q(p,D\bullet) \tag{2}
$$

Abschließend wollen wir nun Gleichung (1) mit Hilfe von F auf dem Fockraum mit dem auf natürliche Weise fortgesetzten Q als Skalarprodukt betrachten. Für $\tilde{u},\tilde{v}\in\bigoplus_{m=0}^{\infty}(V')^{\tilde{\otimes}_Q m}$ und $v=F\tilde{v}\in C_0^\infty(V)$, $u=F\tilde{u}$, die Gleichung (1) erfüllen, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&iQ(\tilde{v},\partial_t\tilde{u})\\
&= iE\left[v\,\partial_t u\right]\\
&\underset{(1)}{=}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{1}{2}m^{-1}(e_k,e_l)\,E\left[Q(Dv,e_k)\,Q(Du,e_l)\right]+E\left[\left(\frac{1}{2}Tr(\omega)+\langle f_t,\cdot\rangle\right)u\,v\right]\\
&\underset{(2)}{=}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{1}{2}m^{-1}(e_k,e_l)\,Q(a(Q(e_k,\cdot))\tilde{v},a(Q(e_l,\cdot))\tilde{u})\\
&\qquad\qquad +Q(\tilde{v},\left(\frac{1}{2}Tr(\omega)+a^*(f_t)+a(Q(f_t,\cdot))\right)\tilde{u})
\end{aligned}
$$

Mit den Notationen $g_k:=\frac{1}{\sqrt{2}}(m\omega^{1/2})^{-1}e_k$, $a_k^*:=a^*(e_k)$, $a_k:=a(Q(e_k,\cdot))$ und $f_t^k:=Q(e_k,f_t)$ und wegen $\frac{1}{2}m^{-1}(e_k,e_l)=m^{-1}((m\omega^{1/2})g_k,(m\omega^{1/2})g_l)=m(g_k,\omega g_l)$ erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&iQ(\tilde{v},\partial_t\tilde{u}) \qquad (3)\\
&=\sum_{k,l=1}^{n}m(g_k,\omega g_l)\,Q(a_l^*a_k\tilde{v},\tilde{u})+\sum_{k=1}^{n}f_t^k\,Q((a_k^*+a_k)\tilde{v},\tilde{u})+\frac{1}{2}Tr(\omega)\,Q(\tilde{v},\tilde{u})
\end{aligned}
$$

Die g_k bilden dabei eine m-Orthonormalbasis und (3) ist die wohlbekannte Gleichung des Harmonischen Quantenoszillators in der Fockraumdarstellung. Eine solche Darstellung ist auch für die Bewegungsgleichung des zweitquantisierten Photonenfeldes üblich.[9] Es ist nun unser Ziel, diese auch über einem $L^2(dP)$-Raum zu formulieren und damit eine zu Gleichung (1) analoge Darstellung zu erhalten.

3 Setting für das Photonenfeld

3.1 Maxwellgleichungen

Die klassischen Maxwellgleichungen für das elektromagnetische Feld haben in der hier gewählten Einheitenkonvention die folgende Form:

$$\nabla \cdot E = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E + \partial_t B = 0$$

$$\nabla \times B - \partial_t E = j$$

Wie üblich führen wir die Potentiale (Φ, A) mit $E = -\nabla\Phi - \partial_t A$ und $B = \nabla \times A$ ein und es bleiben die inhomogenen Maxwellgleichungen:

$$\triangle\Phi + \partial_t \nabla \cdot A = -\rho$$

$$\triangle A - \partial_t^2 A - \nabla(\nabla \cdot A + \partial_t \Phi) = -j$$

3.2 Eichung

Wir werden im Folgenden immer in der Coulomb-Eichung arbeiten. Damit geben wir die explizite Lorentzinvarianz unserer Gleichungen auf. Diesen Preis zu zahlen, ist jedoch die Tatsache wert, dass sich in dieser Eichung die Maxwellgleichung für das elektrische Potential Φ explizit lösen lässt und Φ damit keinen echten Freiheitsgrad mehr darstellt. Insbesondere spielt dieses Potential daher beim Quantisierungsprozess keine wesentliche Rolle mehr. Wir haben also im Folgenden

$$\nabla \cdot A = 0$$

Es sollte an dieser Stelle bemerkt werden, dass auf die notwendige Regularität von ρ, j, Φ und A hier nicht weiter eingegangen wird. Wir erheben nicht den Anspruch aus der klassischen Theorie eine Quantentheorie abzuleiten und dieser Abschnitt dient daher ausschließlich dazu, eine Idee von den der Quantentheorie zugrundeliegenden Objekten zu bekommen. Bei der Formulierung und Lösung der Gleichungen für das zweitquantisierte Photonenfeld muss die Regularität

[9] [8]

der Quellen natürlich wieder diskutiert werden. Aus den Maxwellgleichungen wird nun:

$$\triangle\Phi = -\rho, \qquad \triangle A - \partial_t^2 A - \nabla(\nabla\cdot A + \partial_t\Phi) = -j \tag{4}$$

In der Coulombeichung bleibt eine Resteichfreiheit, nämlich $\Phi \to \Phi - \partial_t\chi$ und $A \to A + \nabla\chi$ mit $\triangle\chi = 0$.

3.3 Analogie zum Harmonischen Oszillator

Für hinreichend reguläres ρ lässt sich Gleichung (4) für Φ lösen und liefert:

$$\Phi(x,t) = \int \frac{\rho(y,t)}{|x-y|}\,dy \tag{5}$$

Mit $J := j - \nabla\partial_t\Phi$ bleibt so die Gleichung

$$\partial_t^2 A - \triangle A = J, \tag{6}$$

zu der die Lagangefunktion $L = \int \left(\frac{1}{2}\partial_t A\cdot\partial_t A + \frac{1}{2}A\triangle A - A\cdot J\right)dx$ gehört. Notieren wir $m(A,B) := \int A\cdot B\,dx$, $\omega(A) := \mathcal{F}^{-1}|\cdot|\mathcal{F}(A)$, wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation ist, und $\lambda_t := \int J_t\cdot\bullet\,dx$, so erhalten wir

$$L = \frac{1}{2}m(\partial_t A, \partial_t A) - \frac{1}{2}m(A, \omega^2 A) - \langle\lambda_t, A\rangle, \tag{7}$$

eine zum Harmonischen Oszillator aus Kapitel 2 analoge Form, die mit dem kanonisch konjugierten Impuls $P = \frac{\delta L}{\delta\partial_t A} = m(\partial_t A, \cdot)$ zu der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2}m^{-1}(P,P) + \frac{1}{2}m(A,\omega^2 A) + \langle\lambda_t, A\rangle \tag{8}$$

führt. Unserer Konfigurationsraum V ist also der Raum der A-Felder, deren Regularität im nächsten Kapitel im Abschnitt 4.2 genauer untersucht wird. Wir stellen uns $A \in V$ als divergenzfreies Vektorfeld von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ vor und damit V als den Raum, in dem die Dynamik der klassischen Feldgleichung (6) verläuft. Auf V ist das L^2-Skalarprodukt m eine eventuell nicht überall definierte quadratische Form und ω wie oben ein linearer Operator.

4 Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes für die L²-Darstellung des Photonenfeldes

4.1 Konstruktion von P zu gegebenem Q

Im Folgenden werden wir mit $\mathcal{S}$ die Schwartzfunktionen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ notieren. Außerdem identifizieren wir $a \in \mathcal{S}$ mit der zugehörigen Linearform $\int a\cdot\bullet\,dx$. Mit $\omega(A) = \mathcal{F}^{-1}|\cdot|\mathcal{F}(A)$ und $Q := \frac{1}{2}(m\omega)^{-1}$ erhalten wir die Wirkung dieser Form auf von Schwartzfunktionen kommenden Linearformen:

$$Q(a,b) = \int \frac{\overline{\hat{a}(x)}\cdot\hat{b}(x)}{|x|}\,dx. \tag{9}$$

Wir wollen nun für dieses Q wie im Falle des Harmonischen Oszillators in Kapitel (2) einen Hilbertraum H finden, auf dem Q eine quadratische Form ist und auf dessen Dualraum H' wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß P konstruieren können, so dass die Auswertungsfunktionale $(\langle a, \cdot \rangle : a \in H)$ bezüglich P eine Gaußsche Familie mit Kovarianz Q sind. Für geeignetes H liefert der folgende Satz eben dieses Wahrscheinlichkeitsmaß P.

Satz:
Sei Q eine abschließbare nichtnegative quadratische Form auf einem separablen Hilbertraum (H, g) mit Definitionsbereich $\mathcal{D}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Es existiert eine Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von H im Definitionsbereich von Q mit $\sum_k Q(e_k, e_k) < \infty$.
2. Es existiert ein Spurklasseoperator q auf H, so dass $Q(a, b) = g(a, q\, b)$ für alle $a, b \in \mathcal{D}$.
3. Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf dem Dualraum$(H', \mathcal{B}(H'))$, so dass $(\langle a, \cdot\rangle : a \in \mathcal{D})$ eine Gaußsche Familie mit Kovarianz Q bezüglich P ist, d.h. $E[\langle a, \cdot\rangle\langle b, \cdot\rangle] = Q(a, b)$ gilt für alle $a, b \in \mathcal{D}$.

Beweis:
1. $\Rightarrow$ 2. : Da Q abschließbar ist, gibt es eine abgeschlossene Erweiterung von Q, die dann von einem selbstadjungierten nichtnegativen Operator stammt, der nach 1. eine endliche Spur hat.

2. $\Rightarrow$ 3. : Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine H-Orthonormalbasis mit

$$q = \sum_k \lambda_k g(e_k, \cdot), \qquad \text{wobei} \qquad q_k \geq 0, \quad \sum_k q_k < \infty.$$

Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der von den Zylindermengen erzeugten σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ lässt sich das Wahrscheinlichkeitsmaß $P := \bigotimes_k \mathcal{N}(0, q_k)$ definieren. Außerdem lässt sich H' in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit

$$H' \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_k \alpha_k g(e_k, \cdot) \mapsto (\alpha_k)_k$$

einbetten. Wir behaupten nun, dass die folgenden σ-Algebren auf H' übereinstimmen.

$$\Sigma_1 := \sigma(\{\lambda \in H' : \sum_k \langle \lambda, e_k\rangle^2 < \epsilon\} : \epsilon > 0),$$

die zur starken Topologie auf H' gehörende Borelsche σ-Algebra,

$$\Sigma_2 := \sigma(\{\lambda \in H' : |\langle \lambda - \mu, x\rangle| < \epsilon\} : \epsilon > 0, \mu \in H', x \in H),$$

die zur schwachen Topologie auf H' gehörige Borelsche σ-Algebra und

$$\Sigma_3 := \sigma(\langle e_k, \cdot\rangle : k \in \mathbb{N}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \cap H',$$

die Spur-σ-Algebra der natürlichen σ-Algebra auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Klar ist hier $\Sigma_3 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$. Es gilt aber auch $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_3$, da $\{\sum_k \langle e_k, \cdot\rangle^2 < \epsilon\}$ Σ_3-messbar ist. Folglich liefert $P|H'$ ein Maß auf $(H', \mathcal{B}(H'))$, wobei $\mathcal{B}(H')$ die zu beiden Topologien auf H' gehörige Borelsche σ-Algebra ist.

Wir müssen noch $P(H') = 1$ zeigen. Wir haben aber, dass

$$X_l : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, (\alpha_k)_k \mapsto \alpha_l$$

bezüglich P $\mathcal{N}(0, q_l)$-verteilte Zufallsvariablen sind und da $\sum_k q_k < \infty$ ist, konvergiert $\sum_k X_k^2$ in $L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, P)$. Insbesondere ist $\sum_k X_k^2 < \infty$ P-fast sicher. Wir erhalten nun

$$\int_{H'} \langle e_k, \cdot\rangle\langle e_l, \cdot\rangle dP = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} X_k\, X_l dP = q_k\, \delta_{k\,l} = Q(e_k, e_l).$$

Damit folgt auch $E\left[\langle x, \cdot\rangle\langle y, \cdot\rangle\right] = Q(x, y)$ für alle $x, y \in \operatorname{span}(e_k : k \in \mathbb{N})$ und wegen der Stetigkeit beider Seiten auch für $x, y \in H$.

3. $\Rightarrow$ 1. : Sei nun $(H', \mathcal{B}(H'), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit

$$E\left[\langle x, \cdot\rangle\langle y, \cdot\rangle\right] = Q(x, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{D}$$

und $(\langle a, \cdot\rangle : a \in \mathcal{D})$ eine Gaußsche Familie. Sei außerdem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H in $\mathcal{D}$ und $U_n := \operatorname{span}(e_1, \cdots, e_n)$. Wir definieren $s_n := \sum_{k=1}^n \langle e_k, \cdot\rangle^2$ und dies hängt offenbar nicht von der Wahl der Orthonormalbasis von U_n ab. Außerdem ist $(s_n)_{n=1}^\infty$ monoton und

$$s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s = \sum_k \langle e_k, \cdot\rangle^2.$$

Da $s(\sum_k \alpha_k\, g(e_k, \cdot)) = \sum_k \alpha_k^2 < \infty$ für alle $\sum_k \alpha_k\, g(e_k, \cdot) \in H'$, folgt $s < \infty$. Wir können für jedes $n \in \mathbb{N}$ nun eine Orthonormalbasis $f_1^n, \cdots, f_n^n$ von U_n wählen, so dass $(\langle f_1^n, \cdot\rangle, \cdots, \langle f_1^n, \cdot\rangle)$ unanhängig sind. Bezeichne ρ_k^n die Varianz von $\langle f_k^n, \cdot\rangle$. Dann gilt zunächst

$$\infty > C := \sup_{n\in\mathbb{N}, k=1\cdots n} \rho_k^n.$$

Denn gäbe es $\rho_{k_n}^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, so folgte

$$P\left[s_n > M\right] \geq P\left[\langle f_{k_n}^n, \cdot\rangle^2 > M\right] \to 1$$

für alle $M > 0$ und wegen der Monotonie von s_n würde sofort $s = \infty$ folgen, was dem oben gezeigten widerspricht. Nun zeigen wir, dass $E\left[s\right] < \infty$.

$$\begin{aligned}
&\log E\left[e^{-\frac{1}{2}s_n}\right] = \log E\left[e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \langle f_k^n, \cdot\rangle^2}\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \log E\left[e^{-\frac{1}{2}\langle f_k^n, \cdot\rangle^2}\right] = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \log(1 + \rho_k^n) \\
&\underset{(\star)}{\leq} -\frac{1}{2}\frac{\log(1+C)}{C}\sum_{k=1}^n \rho_k^n = -\frac{1}{2}\frac{\log(1+C)}{C} E\left[s_n\right]
\end{aligned}$$

In ($\star$) haben wir hier $\log(1+x) \geq \frac{\log(1+C)}{C} x$ für $x \in [0, C]$ benutzt. Wegen $s < \infty$ und somit $E\left[e^{-\frac{1}{2}s}\right] > 0$ folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz auf der linken und dem von der monotonen Konvergenz auf der rechten Seite:

$$-\infty < \log E\left[e^{-\frac{1}{2}s}\right] \leq -\frac{1}{2}\frac{\log(1+C)}{C} E[s]$$

Also ist $\infty > \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\langle e_k, \cdot\rangle^2\right] = \sum_{k=1}^{\infty} Q(e_k, e_k)$. $\square$

Unser nächstes Ziel ist nun also ein geeignetes Skalarprodukt auf $\mathcal{S}$ zu finden, sodass Q bezüglich dieses Skalarprodukts die zu einem Spurklasseoperator gehörige quadratische Form ist.

4.2 Regularität des Trägers von P

Es ist von großem physikalischen Interesse, die Regularität des Trägers des Maßes P zu bestimmen. Dieser Träger stellt all jene klassischen A-Feldkonfigurationen dar, die zur quantenmechanischen Beschreibung des Photonenfeldes beitragen, die also mit positiver Wahrscheinlichkeit messbar sind. Die Regularität der Ströme, die an dieses quantisierte elektromagnetische Feld gekoppelt werden können, ist gerade zur Regularität der A-Felder dual. Es ist daher wünschenswert, den Träger von P möglichst genau zu ermitteln. Zunächst soll nun kurz die Idee zur Wahl eines geeigneten Skalarprodukts g auf $\mathcal{S}$ erläutert werden, das es uns ermöglicht den Satz im vorigen Abschnitt für $H := \overline{\mathcal{S}}^g$ anzuwenden. Für einen selbstadjungierten Operator $C \geq 1$ auf L^2 setzten wir $g(a, b) := m^{-1}(a, C\, b)$. Zur Erinnerung: m^{-1} entspricht dem $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{R}^3$-Skalarprodukt. Für eine L^2-Orthonormalbasis $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist dann $(C^{-\frac{1}{2}} f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine g-Orthonormalbasis von H, denn dies ist der Formdefinitionsbereich von C und $C^{\frac{1}{2}} : (H, g) \to L^2$ eine Isometrie, die surjektiv ist, weil $C^{-\frac{1}{2}}$ auf dem Bild von $C^{\frac{1}{2}}$ nach L^2 beschränkt und abgeschlossen ist. Soll also Q bezüglich g von einem Spurklasseoperator stammen, so brauchen wir:

$$\begin{aligned}\infty > \sum_k Q(C^{-\frac{1}{2}} f_k, C^{-\frac{1}{2}} f_k) &= \sum_k \int \overline{\hat{f}_k} \cdot \hat{C}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{|\cdot|} \hat{C}^{-\frac{1}{2}} \hat{f}_k \, dx \\ &= \mathrm{Tr}_{L^2}\left[\hat{C}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{|\cdot|} \hat{C}^{-\frac{1}{2}}\right] = \mathrm{Tr}_{L^2}\left[\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}} \hat{C}^{-1} \frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\right]\end{aligned}$$

Dabei ist mit $\hat{\cdot}$ die Fouriertransformation gemeint. Um diese Rechnung zu rechtfertigen, müssen wir voraussetzen, dass H dicht in L^2 liegt und im Definitionsbereich des Multiplikationsoperators $\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\bullet$. Dann können wir aus der Endlichkeit der letzten Spur folgern, dass $\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\hat{C}^{-\frac{1}{2}}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Insbesondere können wir diesen Operator und sein Adjungiertes, welches zunächst sicher auf H definiert ist, dann in der Spur vertauschen. Da die danach auftauchenden Integranden alle nichtnegativ sind, ist damit die obige Rechnung durchführbar. Im restlichen Teil dieses Abschnitts werden wir ausschließlich im Fourierraum arbeiten, d.h. $\omega = |\cdot|\bullet$. Wir setzen nun

$$\hat{C}_{m,n} := \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{|\beta|\leq n} (-1)^{|\beta|} \partial^\beta k^{2\alpha} \partial^\beta$$

und für $a, b \in \mathcal{S}$: $g_{m,n}(a,b) := \int a \cdot C_{m,n}\, b\, dx$, also

$$\|a\|^2_{m,n} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{|\beta|\leq n} \|k^\alpha \partial^\beta \hat{a}\|^2_{L^2}.$$

Diese quadratische Form ist abschließbar und $C_{m,n}$ bezeichne den zur Friedrichserweiterung gehörigen selbstadjungierten Operator. Nun betrachten wir die von diesen Skalarprodukten erzeugten Hilberträume $H^{m,n} := \overline{\mathcal{S}}^{g_{m,n}}$, welche in L^2 dicht liegen. Zunächst bemerken wir, dass $\|\cdot\|_{m,n} \leq \|\cdot\|_{m,n+1} \leq \|\cdot\|_{m+1,n+1}$ und damit entsprechende Inklusionen für diese Sobolevräume gelten. Jetzt werden wir zwei technische Lemmata beweisen:

Lemma 1:
Über $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt mit analogen Definitionen wie oben:

$$A_{m,n} := (1 + \sum_{k=1}^{d} (-\partial_k^2)^{\frac{m}{2}})(1 + |x|^{2n})(1 + \sum_{k=1}^{d} (-\partial_k^2)^{\frac{m}{2}}) \leq \text{const}\, C_{m,n}$$

falls $m \in 2\mathbb{N}_0$ ist.

Beweis:

Wir schätzen direkt ab:

$$\begin{aligned}
&\langle a, A\, a\rangle_{L^2} \\
&\leq \text{const}\, \langle (1+\sum_k (-\partial_k^2)^{\frac{m}{2}})a, (1+\sum_k x_k^{2n})(1+\sum_k (-\partial_k^2)^{\frac{m}{2}})a\rangle_{L^2} \\
&= \langle (1+\sum_k |p_k|^m)\hat{a}, (1+\sum_k (-\partial_k^2)^n)(1+\sum_k |p_k|^m)\hat{a}\rangle_{L^2} \\
&= \text{const}\, \left\|(1+\sum_k |p_k|^m)\hat{a}\right\|_{L^2}^2 + \sum_k \left\|\partial_k^n (1+\sum_l |p_l|^m)\hat{a}\right\|_{L^2}^2 \\
\underset{m\in 2\mathbb{N}_0}{=}&\ \text{const}\, \left\|(1+\sum_k |p_k|^m)\hat{a}\right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \sum_k \left\|(1+\sum_l |p_l|^m)\partial_k^n \hat{a} + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l}\frac{m!}{l!}\mathbb{1}_{l<m}\, |p_k|^{m-l}(\operatorname{sign} p_k)^l \partial_k^{n-l}\hat{a}\right\|_{L^2}^2 \\
\underset{\frac{1}{2}\|x+y\|^2\leq\|x\|^2+\|y\|^2}{\leq}&\ \text{const}\, (\|\hat{a}\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^d \left\||p_k|^m\hat{a}\right\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^d \|\partial_k^n\hat{a}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \sum_{k=1}^d\sum_{l=0}^n \left\||p_k|^{m-l}\partial_k^{n-l}\hat{a}\right\|_{L^2}^2) \\
&\leq \text{const} \sum_{|\alpha|\leq n,\, |\beta|\leq m} \underbrace{\left\|p^\beta \partial^\alpha \hat{a}\right\|_{L^2}^2}_{=\|\partial^\beta x^\alpha a\|_{L^2}^2} \\
&\leq \text{const}\, \|a\|_{m,n}^2\, .
\end{aligned}$$

□

Nun ist die zu $A_{m,n}$ gehörige quadratische Form $g_{A_{m,n}}$ abschließbar. Denn sei $(f_n)_n$ eine gegen f in L^2 konvergente Folge und eine $g_{A_{m,n}}$-Cauchyfolge, dann folgt aus $A_{m,n} = (1+|p|_m^m)^2 + (1+|p|_m^m)(2|x|^n + |x|^{2n})(1+|p|_m^m) \geq (1+|p|_m^m)^2$, dass $(f_n)_n$ auch eine H^m-Cauchyfolge ist, also erhalten wir $(1+|p|_m^m)f_n \to f$ in L^2 und damit und weil auch $((1+|x|^n)(1+|p|_m^m)f_n)_n$ eine L^2-Cauchyfolge ist, folgt die Behauptung.

Sei nun f im Formdefinitionsbereich von $C_{m,n}$. Dann gibt es eine Folge von Schwartzfunktionen, die in $H^{m,n}$ gegen f konvergiert. Und wegen Lemma 1 ist diese Folge eine $g_{A_{m,n}}$-Cauchyfolge, konvergiert also im Formdefinitionsbereich von $A_{m,n}$. Also gilt Lemma 1 sogar auf $H^{m,n}$ im Sinne von quadratischen Formen.

Lemma 2:
Über $\mathbb{R}^3$ gilt: Falls $m, n \geq 2$, folgt $\mathrm{Tr}_{L^2}\left[|\cdot|^{-\frac{1}{2}} A_{m,n}^{-1} |\cdot|^{-\frac{1}{2}}\right] < \infty$.

Beweis:
Der Operator $|\cdot|^{-\frac{1}{2}} A_{m,n}^{-1} |\cdot|^{-\frac{1}{2}}$ hat den Integralkern $K(u,v) = \int dp \int dq\, \kappa(u,p,q,v)$ mit

$$\kappa(u,p,q,v) = \kappa_1(u-p)\,(1+|p|_m^m)^{-1}\kappa_2(p-q)\,(1+|q|_m^m)^{-1}\kappa_1(q-v),$$

wobei $\kappa_1(p) = \frac{\text{const}}{|p|^{\frac{5}{2}}}$ die Fouriertransformation von $|\cdot|^{-\frac{1}{2}}$ ist. Mit $n \geq 2$, also $(1+|x|^{2n})^{-1} \in L^1 \cap C^\infty$, folgt außerdem

$$\kappa_2(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{e^{ip\cdot x}}{1+|x|^{2n}}\, dx \leq \frac{\text{const}}{1+|p|^2}.$$

Hierbei ist $|p|_m^m = \sum_{k=1}^3 |p_k|^m$. Die Form des Integralkerns prüft man leicht auf Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ nach. Die Wohldefiniertheit des Integrals in K wird im Folgenden mit gezeigt. Wir wollen nun beweisen, dass K stetig ist. Wähle dazu ein $\epsilon > 0$, sowie $u, v \in \mathbb{R}^3$ und Folgen $(u_n)_{n=1}^\infty \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(u)$, $(v_n)_{n=1}^\infty \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(v)$, die gegen u bzw. v konvergieren. Falls nun $\tilde{u} \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(u)$ und $\tilde{v} \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(v)$ sind, haben wir

$$\begin{aligned}
&\kappa(\tilde{u},p,q,\tilde{v})\, 1_{B_\epsilon(u)^c \times B_\epsilon(v)^c}(p,q) \\
&\leq const \left((\inf_{\bar{u}\in B_{\frac{\epsilon}{2}}(u)} |p-\bar{u}|^{\frac{5}{2}})(1+|p|_m^m)(\inf_{\bar{v}\in B_{\frac{\epsilon}{2}}(v)} |q-\bar{v}|^{\frac{5}{2}})(1+|q|_m^m) \right)^{-1} \in L^1,
\end{aligned}$$

da $m \geq 2$ ist. Nun schätzen wir den übrigen Teil von K ab.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{B_\epsilon(u)} dp\, |\kappa(\tilde{u},p,q,\tilde{v})| \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{B_\epsilon(u)} dp \left| \kappa(\tilde{u},p,q,\tilde{v})\, \frac{|\tilde{u}-p|^{\frac{5}{4}}}{|\tilde{v}-q|^{\frac{5}{4}}} \frac{|\tilde{v}-q|^{\frac{5}{4}}}{|\tilde{u}-p|^{\frac{5}{4}}} \right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{B_\epsilon(u)} dp \left(\kappa_1(\tilde{u}-p)\,(1+|p|_m^m)^{-1} \frac{|\tilde{u}-p|^{\frac{5}{4}}}{|\tilde{v}-q|^{\frac{5}{4}}} \right)^2 |\kappa_2(p-q)| \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{B_\epsilon(u)} dp \left(\kappa_1(\tilde{v}-q)\,(1+|q|_m^m)^{-1} \frac{|\tilde{v}-q|^{\frac{5}{4}}}{|\tilde{u}-p|^{\frac{5}{4}}} \right)^2 |\kappa_2(p-q)| \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \text{const} \left(\int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{B_\epsilon(u)} dp\, |\tilde{u}-p|^{-\frac{5}{2}} |\tilde{v}-q|^{-\frac{5}{2}} (1+|p-q|^2)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{B_\epsilon(u)} dp\, |\tilde{u}-p|^{-\frac{5}{2}} |\tilde{v}-q|^{-\frac{5}{2}} (1+|q|_m^m)^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leq \text{const} \int_{B_{2\epsilon}(0)} dp\,|p|^{-\frac{5}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} dq\,|q|^{-\frac{5}{2}} (1 + \inf_{\bar{v}\in B_{\frac{\epsilon}{2}}(v)} \inf_{\tilde{p}\in B_\epsilon(u)} |\tilde{p} - q - \bar{v}|^2)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} dq\,|q|^{-\frac{5}{2}} \left(\inf_{\bar{v}\in B_{\frac{\epsilon}{2}}(v)} (1 + |q-\bar{v}|_m^m) \right)^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} = o(\epsilon), \quad \epsilon \to 0$$

Wir haben damit gezeigt, dass κ integrierbar ist und erhalten außerdem:

$$\begin{aligned}
&|K(u,v) - K(u_n,v_n)| \\
&\leq \underbrace{\int_{B_\epsilon(v)^c} dq \int_{B_\epsilon(u)^c} dp\,|\kappa(u,p,q,v) - \kappa(u_n,p,q,v_n)|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} dq \int_{B_\epsilon(u)} dp\,|\kappa(u,p,q,v) - \kappa(u_n,p,q,v_n)| \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} dp \int_{B_\epsilon(v)} dq\,|\kappa(u,p,q,v) - \kappa(u_n,p,q,v_n)| \\
&\quad + \int_{B_\epsilon(v)} dp \int_{B_\epsilon(u)} dp\,|\kappa(u,p,q,v) - \kappa(u_n,p,q,v_n)|
\end{aligned}$$

Wähle also zunächst ϵ genügend klein, damit die drei letzten Summanden einen beliebig kleinen Wert annehmen und dann n genügend groß, um $K(u_n,v_n) \to K(u,v)$ zu zeigen. Die Spur lässt sich nun leicht berechnen, wobei wir in der vorletzten Ungleichung Cauchy-Schwarz verwenden.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{L^2}\left[|\cdot|^{-\frac{1}{2}} \hat{A}_{m,n}^{-1} |\cdot|^{-\frac{1}{2}} \right] \\
&= \int du\, K(u,u) \\
&= \int dp \int dq\,(1+|p|_m^m)^{-1} \kappa_2(p-q)\,(1+|q|_m^m)^{-1} \int du\,\kappa_1(q-u)\kappa_1(u-p) \\
&\leq \text{const} \int dp \int dq\,(1+|q|_m^m)^{-1}\,(1+|p-q|^2)^{-1}\,(1+|p|_m^m)^{-1}\,|p-q|^{-2} \\
&= \text{const} \int dp \int dq\, \left(|p-q|^{-1}\,(1+|p-q|^2)^{-\frac{1}{2}}\,(1+|q|_m^m)^{-1} \right) \\
&\qquad \left(|p-q|^{-1}\,(1+|p-q|^2)^{-\frac{1}{2}}\,(1+|p|_m^m)^{-1} \right) \\
&\leq \text{const} \int dp \int dq\,|p-q|^{-2}\,(1+|p-q|^2)^{-1}\,(1+|q|_m^m)^{-2} \\
&= \text{const} \int (1+|q|_m^m)^{-2}\,dq \int |p|^{-2}\,(1+|p|^2)^{-1}\,dp < \infty
\end{aligned}$$

für $m \geq 2$. $\square$

Als nächstes bemerken wir, dass $H^{2,2}$ im Definitionsbereich von $\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\bullet$ liegt, da für alle $f \in \mathcal{S}$ $\int \frac{|f|^2}{|\cdot|} \leq \text{const} \int f(1-\triangle)f$ gilt.[10] Wir erhalten nun[11]

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{L^2}\left[\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\hat{C}_{2,2}^{-1}\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\right] \\
&\leq \text{const}\,\mathrm{Tr}_{L^2}\left[\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\hat{A}_{2,2}^{-1}\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\right] < \infty.
\end{aligned}$$

$(H^{2,2}, g_{2,2})$ ist also der von uns gesuchte Hilbertraum.

4.3 Erweiterung von P auf Schwartzsche Distributionen

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gezeigt, dass auf $H^{-2,-2} := (H^{2,2})'$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, so dass $(\langle a, \cdot\rangle : a \in H^{2,2})$ eine Gaußsche Familie mit Kovarianz Q ist. Wir erweitern dieses Maß nun auf den Raum $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'))$ und stellen damit eine Verbindung zum wohlbekannten Bochner-Minlos-Theorem her, welches im Appendix A.4 beschrieben wird. Zunächst zeigen wir, dass

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}') \cap H^{-2,-2} = \mathcal{B}(H^{-2,-2}).$$

Nach dem Beweis des Satzes im Abschnitt 4.1 gilt nämlich

$$\mathcal{B}(H^{-2,-2}) = \sigma(\langle f_k, \cdot\rangle : k \in \mathbb{N})$$

für eine $H^{2,2}$-Orthonormalbasis $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ und natürlich lässt sich diese Basis in $\mathcal{S}$ wählen. Da aber

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}') \cap H^{-2,-2} = \sigma(\langle f, \cdot\rangle|_{H^{-2,-2}} : f \in \mathcal{S}),$$

folgt dann sofort

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}(H^{-2,-2}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{S}') \cap H^{-2,-2} \\
&= \sigma(\langle f, \cdot\rangle|_{H^{-2,-2}} : f \in \mathcal{S}) \subseteq \sigma(\langle f, \cdot\rangle : f \in H^{2,2}) = \mathcal{B}(H^{-2,-2}).
\end{aligned}$$

Somit können wir P auf einfache Weise fortsetzen: $\tilde{P}(C) := P(C \cap H^{-2,-2})$ für jedes $C \in \mathcal{B}(\mathcal{S}')$. Insbesondere ist $\langle a, \cdot\rangle$ für jedes $a \in \mathcal{S}$ bezüglich $\tilde{P}$ ebenfalls mit

[10] [1]

[11] Wir nutzen:

$$\begin{aligned}
&A := \hat{A}_{2,2},\ B := \text{const}\,\hat{C}_{2,2} \Rightarrow A \leq B \\
&\Rightarrow B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} \leq 1 \\
&\Rightarrow B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}} \geq 1 \\
&\Rightarrow A^{-1} \geq B^{-1}
\end{aligned}$$

Varianz $Q(a,a)$ normalverteilt, also gilt $E_{\tilde{P}}\left[e^{i\langle a,\cdot\rangle}\right] = e^{-\frac{1}{2}Q(a,a)}$, was nach dem Bochner-Minlos-Theorem die Fouriertransformation eines eindeutigen regulären Borelmaßes mit Gesamtmasse 1 ist. Dies zeigt auch, dass unser Maß P durch die Werte seiner Kovarianz auf Schwartzfunktionen bereits eindeutig festgelegt ist.

4.4 Nichtdynamische Freiheitsgrade und Eichfreiheit der klassischen Gleichung sowie Konstruktion von V

Wir wissen schon, dass der Konfigurationsraum V der A-Felder die Regularität von $H^{-2,-2}$ besitzt. A soll als Anfangsbedingung der klassischen Feldgleichung außerdem divergenzfrei sein. Ist nun A_t eine Lösung der Gleichung (6) zur Anfangsbedingung A, so ist auch $A_t + B$ eine Lösung für jedes B mit $\triangle B = 0$. B ist jedoch nur eine zeitlich konstante Verschiebung, die auf die Dynamik von A_t keinen Einfluss hat. Das folgende Lemma zeigt, dass die zulässigen Verschiebungen einen dreidimensionalen Unterraum von $H^{-2,-2}$ bilden.

Lemma 1:
$\left\{A \in H^{-2,-2} : \triangle A = 0\right\} = \mathbb{R}^3\, \check{\delta_0}$, wobei $\langle a, \check{\delta_0}\rangle = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int a(x)\, dx$.

Beweis:
Zunächst ist $\check{\delta_0} \in H^{-2,-2}$, da

$$\left|\int a(x)\, dx\right| \le \left(\int (1+|x|^2)^{-2}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (1+|x|^2)^2\, |a(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \text{const}\ \|a\|_{H_{2,2}}$$

und offenbar gilt auch $\triangle\check{\delta_0} = 0$. Sei nun $A \in H^{-2,-2}$ mit $\triangle A = 0$. Dann ist die Fouriertransformation $\hat{A} \in H^{-2,-2}$ mit Träger in Null. Daraus folgt bereits, dass $\hat{A}$ endliche Linearkombination von $(\partial^\alpha \delta_0)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^3}$ ist.[12] Sei also

$$\hat{A} = a_\beta \partial^\beta \delta_0 + \sum_{\alpha\neq\beta,\, |\alpha|\le k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$

Setze dann $f_\epsilon := x^\beta e^{-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2} \in H^{2,2}$. Für $|\alpha|, |\gamma| \le 2$ und $\epsilon \le 1$ gilt

$$\|x^\gamma \partial^\alpha f_\epsilon\|_{L^2}^2 = \int \left|x^\gamma \partial^\alpha x^\beta e^{-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2}\right|^2 dx \underset{x\to\epsilon x}{=} \int \left|\epsilon^{|\gamma|} x^\gamma \epsilon^{-|\alpha|} \partial^\alpha \epsilon^{|\beta|} x^\beta e^{-x^2}\right| \epsilon^3 dx$$

$$= \text{const}\, \epsilon^{3+2|\gamma|-2|\alpha|+2|\beta|} \le \text{const}\, \epsilon^{3-4+2|\beta|}.$$

Insbesondere folgt $\|f_\epsilon\|_{H^{2,2}} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ für $|\beta| \ge 1$. Wegen $\hat{A} \in H^{-2,-2}$ und $\langle f_\epsilon, \hat{A}\rangle = a_\beta \partial^\beta x^\beta|_{x=0} = a_\beta \beta!$ folgt also $a_\beta = 0$. □

Diesen nichtdynamischen Freiheitsgrad wollen wir nun aus dem Raum der Anfangsbedingungen herausdividieren. In einer geometrischeren Beschreibung der

[12] [2]

A-Felder wie die im Appendix A.6 entspricht die uns hier interessierende Stelle $k = 0$ im Fourierraum der Spitze des Lichtkegels, auf dem Lösungen der freien Feldgleichung ihren Träger haben. Da es schwierig ist an dieser Stelle Forderungen an die Differenzierbarkeit von auf dem Lichtkegel definierten Funktionen zu stellen, wollen wir nun auch darauf verzichten. Dies gelingt mit dem folgenden Lemma, welches wir als weiteren Hinweis darauf betrachten, dass die von uns gewählte Regularität die richtige ist.

Lemma 2:
Sei $a \in H^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, d.h. für alle Multiindices $|\alpha| \leq 2$ existiert ein $a_\alpha \in L^2$ mit

$$\int a \cdot \partial^\alpha b \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int a_\alpha \cdot b \, dx$$

für alle $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ und sei a in einer Umgebung um die Null herum beschränkt. Dann folgt $a \in H^2$.

Beweis:
Sei a wie im Lemma und $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Sei außerdem $f_\epsilon(x) := f(\frac{x}{\epsilon})$ für ein $f \in C_0^\infty(B_1(0))$ und $f|_{B_{\frac{1}{2}}(0)} = 1$. Dann ist

$$\int a \cdot \partial^\alpha b \, dx = \int a \cdot \partial^\alpha (f_\epsilon b) \, dx + \int a \cdot \partial^\alpha ((1 - f_\epsilon) b) \, dx$$

$$= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \int a \cdot (\partial^\beta f_\epsilon) \partial^{\alpha - \beta} b \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int a_\alpha \cdot (1 - f_\epsilon) b \, dx.$$

Der zweite Summand konvergiert für $\epsilon \to 0$ offenbar gegen $(-1)^{|\alpha|} \int a_\alpha \cdot b \, dx$ und für die restlichen Summanden gilt

$$\int a \cdot (\partial^\beta f_\epsilon) \partial^{\alpha - \beta} b \, dx = \epsilon^{-|\beta|} \int a \cdot ((\partial^\beta f) \left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right)) \partial^{\alpha - \beta} b \, dx$$

$$\leq \epsilon^{-|\beta|} \left\| \partial^\beta f \right\|_\infty \int_{B_\epsilon(0)} |a| |\partial^{\alpha - \beta} b| \, dx \leq \text{const} \, \epsilon^{3 - |\beta|} \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Wir definieren nun

$$V := \frac{\left\{ A \in H^{-2,-2} : \nabla \cdot A = 0 \right\}}{\mathbb{R}^3 \, \check{\delta}_0}$$

mit dem von $H^{-2,-2}$ stammenden Skalarprodukt. Wir haben damit auch alle restlichen Eichfreiheiten herausdividiert, denn nach Abschnitt 3.2 bleibt nur $\hat{A} \to \hat{A} + k\hat{\chi}$ als Eichfreiheit übrig, wobei $\hat{\chi}$ eine Distribution mit Träger in Null ist. Insbesondere hat auch $k\hat{\chi} \in H^{-2,-2}$ Träger in Null, ist also bereits im Spann von $\check{\delta}_0$. Wir beweisen nun

Lemma 3:
Mit $U = \left\{a \in H^{2,2} : \int a\,dx = 0\right\}$ gilt die natürliche Gleichheit im Sinne von Vektorräumen:

$$V' = \frac{U}{\overline{\{\nabla\chi : \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})\}}^U}$$

Beweis:
Sei $[a]$ in der rechten Seite. Dann ist $V \ni [A] \mapsto \langle a, A\rangle$ für divergenzfreies $A \in H^{-2,-2}$ wegen

$$\langle a + \lim_{n\to\infty} \nabla\chi_n, A + \rho\check{\delta}_0\rangle = \langle a, A\rangle + \lim_{n\to\infty}\langle\nabla\chi_n, A\rangle + \rho\langle a, \check{\delta}_0\rangle + \rho\lim_{n\to\infty}\langle\nabla\chi_n, \check{\delta}_0\rangle$$

$$= \langle a, A\rangle - \lim_{n\to\infty}\langle\chi_n, \nabla\cdot A\rangle + \rho\langle a, \check{\delta}_0\rangle - \rho\lim_{n\to\infty}\langle\nabla\chi_n, \check{\delta}_0\rangle = \langle a, A\rangle$$

unabhängig von den Repräsentanten und damit ein Element von V'. Wir zeigen nun, dass diese Zuordnung injektiv ist. Sei nun also $\langle a, A\rangle = 0$ für alle divergenzfreien $A \in H^{-2,-2}$. Dann ist insbesondere für alle $B \in C_0^\infty$:

$$0 = \langle a, \nabla\times B\rangle = -\langle\nabla\times a, B\rangle,$$

also $\nabla\times a = 0$. Im Fourierraum bedeutet dies $k\times\hat{a} = 0$. Wir zerlegen nun $\hat{a}$ in Komponenten parallel und senkrecht zu k und erhalten $\hat{a} = k\chi$, woraus wir $\chi = \frac{k\cdot\hat{a}}{|k|^2}$ ablesen. Sei nun $0 \le \phi \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\phi|_{B_{\frac{1}{2}}(0)} = 1$ und setze $\phi_\epsilon := \epsilon^3\phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right)$, sowie $f_\delta := \phi(\delta\cdot) - \phi\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)$. Für $\chi_{\epsilon,\delta} := \frac{k\cdot(\hat{a}\star\phi_\epsilon)}{|k|^2} f_\delta \in C_0^\infty$ wollen wir dann

$$k\chi_{\epsilon,\delta} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \hat{a} f_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} \hat{a}$$

zeigen, wobei hier Konvergenz in $H^{2,2}$ gemeint ist. Zunächst gilt $\hat{a}_j\star\phi_\epsilon \to \hat{a}_j$ in $H^{2,2}$. Und da $k\frac{k_j}{|k|^2} f_\delta \in C_0^\infty$ nicht von ϵ abhängt, folgt

$$k\chi_{\epsilon,\delta} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} k\frac{k\cdot\hat{a}}{|k|^2} f_\delta = \hat{a} f_\delta.$$

Nun zeigen wir, dass $\hat{a}\,\phi\left(\frac{\cdot}{\delta}\right) \xrightarrow{H_{2,2}} 0$. Seien dazu $|\alpha|, |\beta| \le 2$ Multiindices. Dann haben wir

$$\left\|k^\alpha\partial^\beta\hat{a}\,\phi\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)\right\|_{L^2}^2 \le \text{const}\max_{\gamma\le\beta}\delta^{-2|\beta-\gamma|}\left\|k^\alpha(\partial^\gamma\hat{a})(\partial^{\beta-\gamma}\phi)\left(\frac{\cdot}{\delta}\right))\right\|_{L^2}^2$$

$$\le \text{const}\max_{\gamma\le\beta}\delta^{-2|\beta-\gamma|}\left\|\partial^\gamma\hat{a}\right\|_{L^2(B_\delta(0))}^2.$$

Für $\gamma = \beta$ ist die Konvergenz klar, da $\partial^\beta\hat{a} \in L^2$ ist. Für die übrigen Fälle benutzen wir Lemma 4 und Lemma 5 unten. Beachte dafür, dass $\hat{a}(0) = 0$, da $a \in U$ und $\partial^\gamma\hat{a} \in H^1$ für $|\gamma| = 1$. Es fehlt nun noch $\phi(\delta\cdot)\hat{a} \to \hat{a}$ in $H^{2,2}$ zu zeigen. Dies folgt, weil

$$\left\|k^\alpha\partial^\beta\hat{a}\phi(\delta\cdot)\right\|_{L^2}$$

$$\leq \text{const}\left(\max_{\gamma\leq\beta,|\gamma|>0}\delta^{2|\gamma|}\left\|k^\alpha(\partial^{\beta-\gamma}\hat{a})(\partial^\gamma\phi)(\delta\cdot)\right\|_{L^2}+\left\|k^\alpha(\partial^\beta\hat{a})(1-\phi(\delta\cdot))\right\|_{L^2}\right)$$

$$\leq \text{const}\left(\max_{\gamma\leq\beta,|\gamma|>0}\delta^{2|\gamma|}\|\phi\|_{C^2}\|\hat{a}\|_{H^{2,2}}+\left\|k^\alpha(\partial^\beta\hat{a})(1-\phi(\delta\cdot))\right\|_{L^2}\right)\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

gilt. Insgesamt erhalten wir also, dass es eine Folge in $\{\nabla\chi : \chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})\}\cap U = \{\nabla\chi : \chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})\}$ gibt, die in $H^{2,2}$ gegen a konvergiert. Damit ist $[a]=0$. Um den Beweis des Lemmas abzuschließen müssen wir noch die Surjektivität der Zuordnung zeigen. Sei also nun $b\in V'$. Dann ist

$$\left\{A\in H^{-2,-2} : \nabla\cdot A = 0\right\}\ni A\mapsto\langle b,[A]\rangle$$

stetig. Weiter gilt für $A_m\to A$ in $H^{-2,-2}$ mit $\nabla\cdot A_m=0$ natürlich auch $A_m\to A$ in $\mathcal{S}'$, also folgt $0=\nabla\cdot A_m\to\nabla\cdot A$ in $\mathcal{S}'$. Damit ist $\left\{A\in H^{-2,-2}:\nabla\cdot A=0\right\}$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^{-2,-2}$ und das oben definierte Funktional kann zu $a\in\left(H^{-2,-2}\right)'=H^{2,2}$ mit

$$(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int a\,dx=\langle a,\check{\delta_0}\rangle=\langle b,[\check{\delta_0}]\rangle=0$$

fortgesetzt werden. Die Äquivalenzklasse von a repräsentiert offenbar b. □

Lemma 4:
Sei a Element des Sobolevraumes H^1. Dann gilt:

$$\int_{B_\delta(0)}|a|^2\leq\delta^2\int_{B_\delta(0)}\frac{|a|^2}{|\cdot|^2}=o(\delta^2)\leq 4\,\delta^2\|a\|^2_{H^2},\quad\delta\to 0$$

Beweis:
Mit der Hardy-Ungleichung gilt $\frac{|a|^2}{|\cdot|^2}\in L^1$. □

Lemma 5:
Sei a Element des Sobolevraumes H^2 mit $a(0)=0$. Dann gilt:

$$\int_{B_\delta(0)}|a|^2=\int_0^1 dt\int_0^1 ds\int_{B_\delta(0)}x\cdot\nabla a(t\,x)\,x\cdot\nabla a(s\,x)\,dx$$

und $\int_{B_\delta(0)}|a|^2=o(\delta^4)$ für $\delta\to 0$.

Bemerkung:
$a(0)=0$ ist wohldefiniert, da nach dem Soboleveinbettungssatz $a\in C^{0,\frac{1}{2}}$ gilt.

Beweis:
Für $a\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $a(0)=0$ ist die erste Gleichung klar nach dem Hauptsatz. Wir nehmen nun zunächst an, dass $a\in H^2$ ist und auf einer ϵ-Umgebung um

die Null herum verschwindet. Wählen wir nun eine Folge $a_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}})$ mit $a_m \to a$ in H^2, dann folgt die Gleichung auch für a, da

$$\int_{B_\delta} |a_m|^2 \to \int_{B_\delta} |a|^2$$

und

$$\int_{B_\delta} x \cdot \nabla a_m(t\,x)\, x \cdot \nabla a_m(s\,x)\, dx \to \int_{B_\delta} x \cdot \nabla a(t\,x)\, x \cdot \nabla a(s\,x)\, dx$$

und die zweite Konvergenz auch in $L^1(ds\,dt)$ gilt, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B_\delta} x \cdot \nabla a_m(t\,x)\, x \cdot \nabla a_m(s\,x)\, dx \right| \\
&\le \delta^2 \int_{B_\delta} |\nabla a_m(t\,x)|\, |\nabla a_m(s\,x)|\, dx \\
&\le \delta^2 \left(\int_{B_\delta} |\nabla a_m(t\,x)|^2\, dx \int_{B_\delta} |\nabla a_m(s\,x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (10)\\
&\le \delta^2\, t^{-\frac{3}{2}} s^{-\frac{3}{2}} \left(\int_{B_{t\delta}} |\nabla a_m|^2 \int_{B_{s\delta}} |\nabla a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\underset{(\star)}{\le} \delta^4 t^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} \sum_j \int_{B_\delta} \frac{|\partial_j a_m|^2}{|\cdot|^2} \\
&\le 4\, \delta^4 t^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} \|a_m\|_{H^2}^2 \in L^1(ds\,dt)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in $(\star)$ das gleiche Argument wie in Lemma 4 verwendet. Nun führen wir den allgemeinen Fall $a \in H^2$ mit $a(0) = 0$ auf den obigen zurück. Sei dazu $0 \le \phi \in C_0^\infty(B_1)$ mit $\phi|_{B_{\frac{1}{2}}} = 1$. Dann gilt $a_\epsilon := a\,\phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ in H^1, da

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla \left(a\,\phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right)\right)\right\|_{L^2}^2 &\le 2 \left(\left\| \phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right) \nabla a \right\|_{L^2}^2 + \epsilon^{-2} \left\| a \nabla \phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right)\right\|_{L^2}^2 \right) \\
&\le 2 \left(\left\| \phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right) \nabla a \right\|_{L^2}^2 + \epsilon^{-2} \|a\|_{C^0}^2 \|\phi\|_{C^1}^2 \int_{B_\delta} dx \right) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

und die a_ϵ sind in H^2 gleichmäßig beschränkt wegen

$$\begin{aligned}
&\|\partial_k \partial_j a_\epsilon\|_{L^2}^2 \\
&\le 4 \big(\|\phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right) \partial_k \partial_j a\|_{L^2}^2 + \epsilon^{-2} \|\partial_k \phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right) \partial_j a\|_{L^2}^2 + \epsilon^{-2} \|\partial_j \phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right) \partial_k a\|_{L^2}^2 \\
&\qquad + \epsilon^{-4} \|a \partial_k \partial_j \phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right)\|_{L^2}^2 \big) \\
&\le 4 \|\Phi\|_{C^2} \left(\int_{B_\epsilon} |\partial_k \partial_j a|^2 + \epsilon^{-2} \int_{B_\epsilon} |\nabla a|^2 + \epsilon^{-4} \int_{B_\epsilon} |a|^2 \right).
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden konvergieren gegen Null, wie wir Lemma 4 entnehmen und der letzte ist durch eine von a abhängige Konstante beschränkt, da $a \in C^{0,\frac{1}{2}}$ ist und $a(0) = 0$. Wir wissen bereits, dass die zu zeigende Gleichung für $a - a_\epsilon$ gilt und die Rechnung (10) mit a_m ersetzt durch $a - a_\epsilon$, sowie die Tatsache, dass $a - a_\epsilon \to a$ in H^1 gilt, zeigen uns, dass wir beide Seiten der Gleichung unter Verwendung dieser Folge approximieren können. Dass diese Gleichung nun für unser a gilt, zeigt dann auch $\int_{B_\delta(0)} |a|^2 = o(\delta^4)$. Dazu müssen wir Rechnung (10) nur bis $(\star)$ verfolgen. $\square$

Wir zeigen nun noch eine Darstellung, die V mit einem abgeschlossenen Unterraum von $H^{-2,-2}$ und V' mit einem abgeschlossenen Unterraum von $H^{2,2}$ identifiziert.

Lemma 6:
Es gelten die Gleichheiten

$$V = \left\{A \in H^{-2,-2} : g_{-2,-2}(A, \check{\delta_0}) = 0, \nabla \cdot A = 0\right\}$$

und

$$V' = \left\{a \in H^{2,2} : \nabla \cdot a = 0, \int a \, dx = 0\right\}$$

im Sinne von Hilberträumen

Beweis:
Die Darstellung von V ist klar. Für die zweite Darstellung verwenden wir zunächst die Zuordnung

$$\left\{a \in H^{2,2} : \nabla \cdot a = 0, \int a \, dx = 0\right\} \ni a \mapsto [a] \in \frac{U}{\overline{\{\nabla\chi : \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})\}}^U}$$

mit U wie in Lemma 3. Diese Zuordnung ist injektiv, da für $[a] = 0$ mit a in der linken Seite im Lemma, d.h. $a = \lim_{n\to\infty} \nabla\chi_n$, gilt, dass $\nabla \times a = 0$. Also wissen wir $\hat{a} = k\frac{k\cdot\hat{a}}{|k|^2} = 0$. Sie ist surjektiv, weil für ein a aus U mit dem Beweis von Lemma 3 $[a] = [a - \mathcal{F}^{-1}\left(k\frac{k\cdot\hat{a}}{|k|^2}\right)]$ gilt und dieser Repräsentant divergenzfrei ist. Folglich ist mit der obigen Darstellung von V unter Verwendung der Zuordnung aus Lemma 3 die triviale Zuordnung von $\left\{a \in H^{2,2} : \nabla \cdot a = 0, \int a \, dx = 0\right\}$ nach V' bijektiv und da sie trivial ist, stimmen die Skalarprodukte auf V', die zum einen vom Skalarprodukt auf V und zum anderen vom Skalarprodukt auf $H^{2,2}$ kommen, überein. $\square$

4.5 Zusammenfassung der Konstruktionsschritte

Unser erklärtes Ziel ist es, die klassische Feldgleichung (6) aus dem Abschnitt 3.3 zu quantisieren und damit eine Gleichung für L^2-Funktionen über dem klassischen Konfigurationsraum abzüglich einer nichtdynamischen Verschiebung der klassischen Lösung

$$V = \frac{\{A \in H^{-2,-2} : \nabla \cdot A = 0\}}{\mathbb{R}^3\,\check{\delta_0}}$$

zu erhalten. Um das richtige Wahrscheinlichkeitsmaß auf V zu wählen, müssen wir zunächst die quadratischen Formen definieren, die im klassischen Hamiltonian (8) aus Abschnitt 3.3 auftauchen. Wählen wir die Darstellung aus Lemma 6 im vorigen Abschnitt, so notieren wir

$$W^V := \{A \in W : \nabla \cdot A = 0, g_{-2,-2}(A, \check{\delta_0}) = 0\}$$

für einen Unterraum $W \subseteq H^{-2,-2}$ und

$$\tilde{W}^{V'} := \{a \in \tilde{W} : \int a\,dx = 0, \nabla \cdot a = 0\}$$

für einen Unterraum $\tilde{W} \subseteq H^{2,2}$. Bei den folgenden Definitionen, abgesehen von der für Q am Ende, kommt es auf die Wahl des Definitionsbereiches nicht an. Dieser kann bei Bedarf vergrößert oder verkleinert werden, solange die Ausdrücke wohldefiniert bleiben. Die folgenden Ausführungen bis zur Definition von Q dienen ausschließlich der Klärung von Eichfreiheiten und -Wahl in V'. Verwenden wir nun die Darstellung aus Lemma 3 des vorigen Abschnitts und definieren:

$$m : (L^2)^V \times (L^2)^V \to \mathbb{R}, ([A],[B]) \mapsto \int A \cdot B\,dx$$

Hierbei wird der eindeutige Repräsentant aus L^2 gewählt. Eindeutigkeit gilt, da $\check{\delta_0} \notin L^2$.

$$\omega : (H^{1,0})^V \to (L^2)^V, [A] \mapsto [\mathcal{F}^{-1}(|\cdot|\hat{A})]$$

für den eindeutigen Repräsentanten $A \in H^{1,0}$. ω ist offenbar invertierbar auf seinem Bild.

$$(m\omega) : (H^{1,0})^V \times (H^{1,0})^V \to \mathbb{R}, ([A],[B]) \mapsto \langle A, \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|\hat{B})\rangle$$

Für $A, B \in H^{1,0}$ erhalten wir $(m\omega)([A],[B]) = \int \overline{\hat{A}} \cdot |\cdot| \hat{B}\,dx = m([A], \omega[B])$. Weiter definieren wir unter Verwendung der Darstellung von V' aus Lemma 3

$$(m\omega)^{-1} : V' \to (H^3)^{V'}, [a] \mapsto [\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{a}}{|k|} - k\frac{\hat{a}\cdot k}{|k|^3}\right)].$$

Dies ist wohldefiniert, da $\mathcal{F}^{-1}\frac{1}{|\cdot|}\mathcal{F} : H^{2,2} \to H^3$, denn für $a \in H^{2,2}$ gilt

$$\int (1 + |\cdot|^6)\frac{|\hat{a}|^2}{|\cdot|^2} \leq 4\int |\nabla\hat{a}|^2 + \int |\cdot|^4|\hat{a}|^2 \leq \text{const}\,\|a\|^2_{H^{2,2}}$$

und $\nabla \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{a}}{|k|} - k\frac{\hat{a}\cdot k}{|k|^3}\right) = 0$. Außerdem ist dies auf $\text{Bild}(m\omega)^{-1}$ invertierbar durch

$$m\omega : \text{Bild}(m\omega)^{-1} \to V', [A] \mapsto [\mathcal{F}^{-1}|\cdot|\hat{A}]$$

für $A \in H^3$, denn

$$m\omega\left((m\omega)^{-1}([a])\right) = [\mathcal{F}^{-1}|k|\left(\frac{\hat{a}}{|k|} - k\frac{\hat{a}\cdot k}{|k|^3}\right)] = [a - \nabla\mathcal{F}^{-1}\frac{k\cdot\hat{a}}{|k|^2}] = [a].$$

Nun definieren wir die für uns im Folgenden entscheidende quadratische Form

$$\begin{array}{rrl} Q: & V' \times V' \to & \mathbb{R} \\ & ([a],[b]) \mapsto & \frac{1}{2}\langle [a], (m\omega)^{-1}([b])\rangle \\ & & = \frac{1}{2}\langle a, \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{a}}{|k|} - k\frac{\hat{a}\cdot k}{|k|^3}\right)\rangle = \frac{1}{2}\int\frac{\overline{\hat{a}}\cdot\hat{b}}{|k|} - \frac{1}{2}\int\frac{(k\cdot\overline{\hat{a}})(k\cdot\hat{b})}{|k|^3}. \end{array}$$

Wir können nun auf V' auch die Coulombeichung wählen, verwenden also die Darstellung aus Lemma 6 des vorigen Abschnitts und erhalten so

$$Q(a,b) = \frac{1}{2}\int\frac{\overline{\hat{a}}\cdot\hat{b}}{|k|}.$$

Wir sind also von der Darstellung aus Lemma 3, welche eine Umeichung zulässt, zu der Wahl einer festen Eichung in Lemma 6 übergegangen. Diese quadratische Form Q kann wegen

$$\int\frac{|\hat{a}|^2}{|k|} \leq \text{const}\int\overline{\hat{a}}(1-\triangle)\hat{a})$$

auf ganz $H^{2,2}$ definiert werden[13] und stammt dort nach Abschnitt 4.2 von einem Spurklasseoperator. Somit gilt dies auch für die Einschränkung auf V'. Nach dem Satz im Abschnitt 4.1 bedeutet dies, dass es ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß P auf V gibt, so dass $(\langle a,\cdot\rangle : a \in V')$ eine Gaußsche Familie mit Kovarianz Q in $L^2(V,\mathcal{B}(V),P)$ ist. Nun ist

$$(V',Q) \ni a \mapsto \langle a,\cdot\rangle \in L^2(P)$$

isometrisch, kann also auch isometrisch auf $h := \overline{V'}^Q$ fortgesetzt werden. Damit erhalten wir eine über dem Hilbertraum (h,Q) indizierte isometrische Gaußsche Familie $(\langle a,\cdot\rangle : a \in h)$ in $L^2(V,\mathcal{B}(V),P)$. Wir müssen allerdings vorsichtig sein, $\langle a,\cdot\rangle$ nicht punktweise auf V auszuwerten. Die σ-Algebra $\mathcal{B}(V)$ ist dabei von der Gaußschen Familie erzeugt. Nach Anhang A.2 erhalten wir:

$$L^2(V,\mathcal{B}(V),P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(h,Q)^{\tilde{\otimes}n}$$

und der isometrische Isomorphismus ist gegeben durch:

$$F = \bigoplus_{n=0}^{\infty}F_n : \bigoplus_{n=0}^{\infty}(V')^{\tilde{\otimes}n} \to L^2(V,dP) \tag{11}$$

mit

$$F_n : (V')^{\tilde{\otimes}n} \to \mathcal{H}_n, \frac{1}{\sqrt{\alpha!}}\prod_{k=1}^{\infty}a^*(e_k)^{\alpha_k}\,|0\rangle \mapsto \sqrt{\alpha!}\prod_{k=1}^{\infty}H_{\alpha_k}(\langle e_k,\cdot\rangle),$$

[13] Stabilität des Wasserstoffatoms [17]

wobei $\mathcal{H}_n$ das n-te Wienerchaos, H_{α_k} das α_k-te Hermitepolynom, $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis von h und α ein Multiindex mit $|\alpha| = n$ sind. Mit exakt derselben Rechnung wie zur Formel (2) im Abschnitt 2.4 erhalten wir auch hier über $\{\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Psi_n \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n : \Psi_n = 0 \quad \text{für fast alle } n\}$:

$$Fa(x)F^{-1} = \langle D\bullet, x\rangle \quad , \quad Fa^*(p)F^{-1} = \langle p, \cdot\rangle \bullet - Q(p, D\bullet) \tag{12}$$

wobei D die Malliavin-Ableitung ist.

5 Stochastischer Lösungsansatz für den n-dimensionalen Harmonischen Oszillator

5.1 Stochastische und partielle Differentialgleichungen

Wir wollen nun kurz den wohlbekannten Zusammenhang zwischen stochastischen und partiellen Differentialgleichungen erläutern.[14] Dabei wird im Wesentlichen auf technische Details verzichtet, da dies nur eine Motivation für die korrekte Definition der unitären Familie ist, die dann die Schrödingergleichung für den Harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft lösen soll. Zunächst wählen wir zwei feste Zeiten $t \leq T$. B_τ bezeichne die n-dimensionale Brownsche Bewegung. Sei nun $X_\tau \in \mathbb{R}^m$ Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_\tau = C(\tau, X_\tau)dB_\tau + \beta(\tau, X_\tau)d\tau, \tag{13}$$

wobei $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\beta \in \mathbb{R}^m$. Weiter löst $S_\tau = \exp[\int_t^\tau d\sigma V_\sigma(X_\sigma)]$ offenbar $dS_\tau = V_\tau(X_\tau)\, S_\tau d\tau$. Wir berechnen nun $df(\tau, X_\tau)$ für ein hinreichend glattes f.

$$\begin{aligned}
&df(\tau, X_\tau)\\
&= \partial_\tau f d\tau + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f dX_\tau^j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dX_\tau^j dX_\tau^k\\
&= \partial_\tau f d\tau + \nabla f \cdot \beta d\tau + \nabla f \cdot C dB_\tau + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \sum_{l,i=1}^{m} C^{j\,l} C^{k\,i}\, \underbrace{dB_\tau^l dB_\tau^i}_{=\delta_{l\,i} d\tau}\\
&= \left(\partial_\tau f + \nabla f \cdot \beta + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[C^t H(f) C]\right) d\tau + \nabla f \cdot C dB_\tau
\end{aligned}$$

wobei $H(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)_{j\,k}$ die Hessematrix von f ist. Bauen wir hier noch S_τ ein, so erhallten wir:

$$\begin{aligned}
&d(f(\tau,X_\tau)S_\tau)\\
&\qquad = \left(\partial_\tau f d\tau + \nabla f \cdot \beta d\tau + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[C^t H(f) C] + V_\tau f\right) S_\tau d\tau + S_\tau \nabla f \cdot C dB_\tau
\end{aligned}$$

[14] Für Details siehe z.B. [3]

Nun legen wir Endbedingungen für die zu lösende Differentialgleichung fest. Wir verlangen also, dass $f(T,x) = g(x)$ und starten den Prozess zum Startzeitpunkt t in x, also $P^{t,x}[X_t = x] = 1$. Erfüllt f nun die Differentialgleichung

$$\partial_\tau f + \nabla f \cdot \beta + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[C^t H(f) C] + V_\tau f = 0,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} & E^{t,x}[g(X_T)S_T] - f(t,x) \\ & = E^{t,x}[f(T,X_T)S_T - f(t,X_t)S_t] \\ & = E^{t,x}[\int_t^T d\,(f(\tau,X_\tau)S_\tau)] = 0 \end{aligned}$$

und damit ist $f(t,x) = E^{t,x}[g(X_T)S_T]$. Wir sind im Folgenden vor allem an dem Integralkern interessiert, der die Lösung in der Zeit transportiert. Wir hoffen, dass sich die Lösung in der Form

$$\begin{aligned} & f(t,x) \\ & = \int P^{t,x}\left[X_T \in dy\right]\, E^{t,x}\left[\exp\left(\int d\tau V_\tau(X_\tau)\right)\middle| X_T = y\right]\, g(y) \\ & = \int dy\, \alpha_t^T(x,y)\, g(y) \end{aligned}$$

schreiben lässt.

5.2 Lösung der Schrödingergleichung mit imaginärer Zeit

Wir wollen nun die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts auf drei Beispiele anwenden. Das letzte Beispiel stellt dabei den für uns interessanten Fall dar.

Beispiel 1:
Wir betrachten die Gleichung

$$\partial_t f + \frac{1}{2} m^{-1}(d,d) f = 0 \qquad \text{mit} \qquad m^{-1}(d,d) := \sum_{j,k=1}^{n} (M^{-1})_{j\,k}\partial_j\partial_k,$$

wobei M eine positiv definite symmetrische $n \times n$-Matrix ist. Dies ist die Wärmeleitungsgleichung oder in der für uns relevanten Interpretation die freie Schrödingergleichung mit $i\partial_t$ ersetzt durch ∂_t, also in imaginärer Zeit. Wir haben nun

$$\mathrm{Tr}[(M^{-\frac{1}{2}})^t H(f) M^{-\frac{1}{2}}] = \mathrm{Tr}[M^{-1}H(f)] = m^{-1}(d,d).$$

Mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnitts setzen wir $C = M^{-\frac{1}{2}}$, $V = 0$ und $\beta = 0$. Wir haben somit $dX_\tau = M^{-\frac{1}{2}} dB_\tau$ für (13) und mit Start in (t,x)

ergibt sich $X_\tau = M^{-\frac{1}{2}} B_{\tau - t} + x$. Der Integralkern α_{frei} wird damit

$$\begin{aligned}
&\alpha^T_{t,\text{frei}}(x,y)dy \\
&= P^{t,x}[X_T \in dy] \\
&= \mathcal{N}\left(x, M^{-\frac{1}{2}}(T-t)I\,(M^{-\frac{1}{2}})^t\right)(dy) \\
&= \mathcal{N}\left(x, (T-t)M^{-1}\right)(dy) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\det((T-t)M^{-1})\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y-x)^t \frac{M}{T-t}(y-x)\right] dy \\
&= \sqrt{\frac{\det M}{(2\pi(T-t))^n}} \exp\left[-\frac{1}{2(T-t)} m(y-x, y-x)\right] dy
\end{aligned}$$

Einsetzten von α^T_t in die obige Gleichung zeigt, dass diese erfüllt ist, wenn die Ortsableitungen auf x wirken.

Beispiel 2:
Nun wollen wir die Schrödingergleichung für den Harmonischen Oszillator in imaginärer Zeit untersuchen, d.h.

$$-\partial_t f - \frac{1}{2} m^{-1}(d,d) f + \frac{1}{2} m(x, \omega^2 x) f = 0.$$

Die Bezeichnungen entsprechen jenen aus Kapitel 2 und wie schon dort benutzen wir den Isomorphismus

$$U : L^2(dP) = L^2(|\psi_{GZ}|^2 dx) \to L^2(dx), \tilde{f} \mapsto \tilde{f}\psi_{GZ}$$

mit dem Grundzustand $\psi_{GZ}(x) = \alpha e^{-\frac{1}{2}m(x,\omega x)}$ des Harmonischen Oszillators. Wir haben also $f = \tilde{f}\psi_{GZ}$ und erhalten die äquivalente Gleichung für $\tilde{f}$:

$$-\partial_t \tilde{f} - \frac{1}{2} m^{-1}(d,d)\tilde{f} + \langle d\tilde{f}, \omega(x)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega]\tilde{f} = 0$$

Hierbei ist für $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ gemeint, dass $d = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} e^*_k$ ist, wobei $(e^*_k)_{k=1}^n$ die zu $(e_k)_{k=1}^n$ duale Basis darstellt. Wir führen nun eine Koordinatentransformation durch, so dass $m(x,y) = x^t M y$ das Standardskalarprodukt wird. Unsere Gleichung wird dann zu

$$-\partial_t \tilde{f} - \frac{1}{2}\triangle \tilde{f} + \nabla \tilde{f} \cdot \omega(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega]\tilde{f} = 0.$$

Somit betrachten wir den verallgemeinerten Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$dX_t = dB_t - \omega(X_t)dt,$$

der in (t,x) gestartet die Form

$$X_\tau = e^{-\omega(\tau - t)}(x + \int_t^\tau e^{\omega(s-t)}\, dB_s) \tag{14}$$

annimmt. Es handelt sich hierbei um eine Gaußsche Familie mit Kovarianz

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\left(X_\tau^k, X_\sigma^j\right) \\
&= \operatorname{Cov}\left(\left(\int_t^\tau e^{-\omega(\tau-u)}\, dB_u\right)^k, \left(\int_t^\sigma e^{-\omega(\sigma-v)}\, dB_v\right)^j\right) \\
&= \sum_{l,i=1}^n \operatorname{Cov}\left(\int_t^\tau (e^{-\omega(\tau-u)})_{k\,l}\, dB_u^l, \int_t^\sigma (e^{-\omega(\sigma-v)})_{j\,i}\, dB_v^i\right) \\
&\underset{\text{Ito-Isometrie}}{=} \sum_{l=1}^n \int_t^{\tau\wedge\sigma} (e^{-\omega(\tau-u)})_{k\,l} (e^{-\omega(\sigma-v)})_{j\,l}\, du \\
&\underset{\omega\, m-\text{symm.}}{=} \left(e^{-\omega(\tau+\sigma)} \int_t^{\tau\wedge\sigma} e^{2\omega u}\, du\right)_{k\,j} \\
&= \left(e^{-\omega(\tau+\sigma)} \frac{1}{2\omega} (e^{2\omega(\tau\wedge\sigma)} - e^{2\omega t})\right)_{k\,j} \\
&= \left(\frac{1}{2\omega} (e^{-\omega|\tau-\sigma|} - e^{-\omega(\tau-t)-\omega(\sigma-t)})\right)_{k\,j}
\end{aligned}
$$

Wir wollen nun mit der Idee der Brownschen Brücke[15] einen von X_T unabhängigen Prozess wählen. Wir berechnen dazu

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\left(X_T^k, \left(X_\tau - e^{\omega(T-\tau)} \frac{e^{2\omega\tau} - e^{2\omega t}}{e^{2\omega T} - e^{2\omega t}} X_T\right)^j\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\omega} (e^{-\omega(T-\tau)} - e^{-\omega(T-t)-\omega(\tau-t)})\right)_{k\,j} \\
&\quad - \sum_l \left(e^{\omega(T-\tau)} \frac{e^{2\omega\tau} - e^{2\omega t}}{e^{2\omega T} - e^{2\omega t}}\right)_{j\,l} \left(\frac{1}{2\omega} (1 - e^{-2(T-t)})\right)_{k\,l} \\
&\quad \left(\frac{1}{2\omega} \left[e^{-\omega(T-\tau)} - e^{-\omega(T-t)-\omega(\tau-t)} - e^{\omega(T-\tau)} (e^{2\omega(\tau-T)} - e^{2\omega(t-T)})\right]\right)_{k\,j} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Wir sehen also:

$$
X_T \quad \text{ist unabhängig von} \quad X_\tau - e^{\omega(T-\tau)} \frac{e^{2\omega\tau} - e^{2\omega t}}{e^{2\omega T} - e^{2\omega t}} X_T. \tag{15}
$$

[15] siehe Anhang A.5

Diese Erkenntnis wird uns beim nächsten Beispiel gute Dienste erweisen. Nun zuletzt zum Integralkern

$$
\begin{aligned}
&\alpha^T_{t,HO\,(0)}(x,y)\,dy \\
&= P^{t,x}\left[X_T \in dy\right]\, E^{t,x}\left[\exp(-\int_t^T d\tau\,\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega])\middle| X_T = y\right] \\
&= \exp(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega](T-t))\mathcal{N}\left(e^{-\omega(T-t)}x, \frac{1}{2\omega}(1-e^{-2\omega(T-t)})\right)(dy) \\
&= \left(\det(\frac{\pi}{\omega}(1-e^{-2\omega(T-t)}))\right)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega](T-t)) \\
&\qquad \exp\left(-\frac{1}{2}(y-e^{-\omega(T-t)}x)^t\omega(1-e^{-2\omega(T-t)})^{-1}(y-e^{-\omega(T-t)}x)\right) dy \\
&= \left(\det(\frac{\pi}{\omega}(1-e^{-2\omega(T-t)}))\right)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega](T-t))\sqrt{\det m} \\
&\qquad \exp\left(-\frac{1}{2}m\left(y-e^{-\omega(T-t)}x, \omega(1-e^{-2\omega(T-t)})^{-1}(y-e^{-\omega(T-t)}x)\right)\right) dy,
\end{aligned}
$$

wobei die letzte Darstellung koordinatenunabhängig ist.

Beispiel 3:
Nun kommen wir zu der Gleichung des Harmonischen Oszillators mit einer zeitabhängigen räumlich konstanten äußeren Kraft in imaginärer Zeit. Zusätzlich betrachten wir eine zeitabhängige Energieverschiebung, die in der Lösung der Schrödingergleichung einer entsprechenden Phase entsprechen wird. Unsere Gleichung ist also

$$(-\partial_t - \frac{1}{2}m^{-1}(d,d) + \frac{1}{2}m(x,\omega^2 x) + \langle\lambda_t, x\rangle + c_t)f = 0.$$

Und auch hier führen wir eine Transformation $L^2(dx) \xrightarrow{U} L^2(|\psi_{GZ}|^2 dx)$ wie im vorherigen Beispiel 2 durch und erhalten die Gleichung

$$(-\partial_t - \frac{1}{2}m^{-1}(d,d) + \langle\omega(x), d\rangle + \langle\lambda_t, x\rangle + c_t + \mathrm{Tr}[\omega])\tilde{f} = 0.$$

Um den Kern explizit zu berechnen, führen wir auch hier wieder eine Koordinatentransformation durch, so dass m das Standardskalarprodukt wird. Die Form von X_t bleibt wie in (14) und wir erhalten mit $V_\tau(y) = -\langle\lambda_\tau, y\rangle - c_\tau - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega]$:

$$
\begin{aligned}
&E^{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T d\tau\, V_\tau(X_\tau)\right)\middle| X_T = y\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega](T-t) - \int_t^T d\tau\, c_\tau\right) E^{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T d\tau \lambda_\tau \cdot X_\tau\right)\middle| X_T = y\right]
\end{aligned}
$$

$P[X_T \in dy] = \mathcal{N}\left(e^{-\omega(T-t)}x, \frac{1}{2\omega}(1-e^{-2\omega(T-t)})\right)(dy)$ behält dieselbe Form wie im Beispiel 2 und indem wir den in x gestarteten Prozess aus (14) durch den in Null gestarteten ausdrücken, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&E^{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T d\tau\lambda_\tau \cdot X_\tau\right)\middle| X_T = y\right] \\
&= E^{t,0}\Bigg[\exp\Bigg[-\int_t^T d\tau\lambda_\tau \cdot \Bigg(e^{-\omega(\tau-t)}x + \left(X_\tau - e^{\omega(T-\tau)}\frac{e^{2\omega\tau}-e^{2\omega t}}{e^{2\omega T}-e^{2\omega t}}X_T\right) \\
&\qquad + e^{\omega(T-\tau)}\frac{e^{2\omega\tau}-e^{2\omega t}}{e^{2\omega T}-e^{2\omega t}}(y - e^{-\omega(T-t)}x)\Bigg)\Bigg]\Bigg| X_T = y - e^{-\omega(T-t)}x\Bigg] \\
&\underset{(15)}{=} \rho_t^T \exp\left[-\int_t^T d\tau\lambda_\tau \cdot \left(e^{-\omega(\tau-t)}\frac{e^{2\omega T}-e^{2\omega\tau}}{e^{2\omega T}-e^{2\omega t}}x + e^{\omega(T-\tau)}\frac{e^{2\omega\tau}-e^{2\omega t}}{e^{2\omega T}-e^{2\omega t}}y\right)\right].
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$
\rho_t^T = E^{t,0}\left[\exp\left[-\int_t^T d\tau\lambda_\tau \cdot \left(X_\tau - e^{\omega(T-\tau)}\frac{e^{2\omega\tau}-e^{2\omega t}}{e^{2\omega T}-e^{2\omega t}}X_T\right)\right]\right]
$$

nicht von x und y abhängig. Wir werden die explizite etwas längliche Berechnung von ρ_t^T hier nicht durchführen, weil diese sowieso noch einmal für den uns interessierenden unendlich-dimensionalen Fall vorgenommen werden muss.[16] Insgesamt erhalten wir für unseren Integralkern

$$
\alpha_t^T(x,y) = \alpha_{t,HO}^T(x,y)\beta_t^T(x,y)\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega](T-t) - \int_t^T d\tau\, c_\tau\right) \tag{16}
$$

mit der Unterteilung in einen freien und einen Wechselwirkungsfaktor:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{t,HO}^T(x,y) &= (\det m)^{-\frac{1}{2}}(\det\frac{\pi}{\omega})^{-1}\left(\det(1-e^{-2\omega(T-t)})\right)^{-\frac{1}{2}}\exp[\frac{1}{2}m(y,\omega y)] \\
&\quad \exp\left[-\frac{1}{2}m\left(e^{\frac{\omega(T-t)}{2}}y - e^{-\frac{\omega(T-t)}{2}}x, \frac{\omega}{\sinh(\omega(T-t))}(e^{\frac{\omega(T-t)}{2}}y - e^{-\frac{\omega(T-t)}{2}}x)\right)\right] \\
\beta_t^T(x,y) &= \rho_t^T\exp\left[-\int_t^T d\tau\langle\lambda_\tau, \frac{\sinh(\omega(T-\tau))}{\sinh(\omega(T-t))}x + \frac{\sinh(\omega(\tau-t))}{\sinh(\omega(T-t))}y\rangle\right]
\end{aligned}
$$

Dieser Integralkern ist als Operator über $L^2(dP)$ zu verstehen, d.h.

$$
\tilde{f}(t,x) = \int \alpha_t^T(x,y)\tilde{f}(T,y)|\psi_{GZ}(y)|^2 dy
$$

löst die Differentialgleichung. Deshalb wurde der Integralkern $\alpha_{HO\,(0)}$ aus Beispiel 2 mit ψ_{GZ}^{-1} multipliziert. Der Kern α besteht also aus drei Teilen. α_{HO}

[16] Die Rechnung wird in Abschnitt 7.3 durchgeführt.

ist der Integralkern des freien Harmonischen Oszillators, nachdem die Energie renormiert, d.h. $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega]$ davon abgezogen wurde. Der letzte Teil wird, wenn wir zur quantenmechanischen Gleichung übergehen, einfach eine Phase werden, die aus einer skalaren Veränderung der Energie, also einer Renormierung, herrührt. Der für uns besonders interessante Teil ist β. Dieser kann als Dichte der Dynamik mit äußerer Kraft zur freien Dynamik interpretiert werden. Dabei muss wie schon erwähnt ρ_t^T so gewählt werden, dass die Differentialgleichung für $\tilde{f}$ erfüllt ist. Dies läuft auf das Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung hinaus.

5.3 Lösung der Schrödingergleichung für den Harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft

Wir wollen nun den Integralkern für den n-dimensionalen Harmonischen Quantenoszillator mit äußerer Kraft konstruieren. Dazu verwenden wir den im vorigen Abschnitt bestimmten Kern der entsprechenden Gleichung mit imaginärer Zeit. Wir werden im Folgenden annehmen, dass alle verwendeten Funktionen im Zeitargument auf der gesamten komplexen Ebene definiert sind. Haben wir ersteinmal die Form des Kerns der zur Schrödingergleichung gehörenden unitären Entwicklung bestimmt, können wir diese Annahme wieder fallenlassen. Außerdem nehmen wir eine Renormierung der Energie so vor, dass alle zusätzlichen Konstanten im Hamiltonian wegfallen. Ziel ist eine Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{z}\partial_t u^z = (-\frac{1}{2}m^{-1}(d,d) + \langle\omega(x),d\rangle + \langle j_t, x\rangle)u^z \tag{17}$$

zu finden, wobei z eine komplexe Zahl ist. Sei nun w^z eine Lösung von

$$\partial_t w^z = (-\frac{1}{2}m^{-1}(d,d) + \langle\omega(x),d\rangle + \langle j_{\frac{t}{z}}, x\rangle)w^z$$

und α der entsprechende Kern dazu, also

$$w^z(t,x) = \int \alpha_t^T(x,y)\, w^z(T,y)\, P(dy).$$

Dann setzen wir $u^z(t,x) := w^z(zt,x)$. Und somit erfüllt u^z offenbar Gleichung (17) und

$$u^z(t,x) = \int \alpha_{zt}^{zT}(x,y)\, u^z(T,y)\, P(dy).$$

Wir ersetzten also einfach im Integralkern alle Zeiten t,T durch zt, zT, was in α_{HO} keinerlei Schwierigkeiten bereitet. Bei der Substitution in β müssen wir beachten, dass

$$\int_{zt}^{zT} d\tau \langle\lambda_{\frac{\tau}{z}}, g(zt,zT,\tau)\rangle = z\int_t^T d\tau\langle\lambda_\tau, g(zt,zT,z\tau)\rangle$$

ist. Es bleibt also noch die Ersetzung in ρ_t^T vorzunehmen. Dies ist im Moment nicht möglich, da wir keine explizite Form für ρ haben, aber wir können schlicht weiterhin eine beliebige Funktion von t und T ansetzen und die beim Lösen der Schrödingergleichung erscheinende gewöhnliche Differentialgleichung für diese Funktion lösen. Im unendlichdimensionalen Fall tun wir dies in den Abschnitten 7.2 und 7.3.

6 Bewegungsgleichung für das zweitquantisierte Photonenfeld und freie Lösung

6.1 Schrödingergleichung des zweitquantisierten Photonenfeldes

Der Hamiltonian des Harmonischen Oszillators

$$H(x,p) = \frac{1}{2}m^{-1}(p,p) + \frac{1}{2}m(x,\omega^2 x) + \langle f_t, x\rangle$$

hat im Kapitel 2 zu der schwachen Gleichung (1) geführt. Der völlig analoge Hamiltonian für das klassische elektromagnetische Feld (8) mit den Definitionen für die quadratischen Formen aus Abschnitt 4.5 legt es also nahe, für das Photonenfeld $\Psi \in L^2(V,P)$ die Bewegungsgleichung

$$iE[\Phi\,\partial_t\Psi_t] = E\left[\frac{1}{2}m^{-1}(D\Phi, D\Psi_t) + \Phi\langle J_t,\cdot\rangle\Psi_t\right] \qquad \forall\Phi \tag{18}$$

anzunehmen. Dabei haben wir im Vergleich zu (1) auf den Term $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\omega]$, der in unserem Fall unendlich wäre, verzichtet. Dieser Term entspricht der Grundzustandsenergie des Harmonischen Oszillators und es sollte nicht verwundern, dass dieser für das elektromagnetische Feld mit unendlich vielen Freiheitsgraden divergiert. Eine Renormierung ist also notwendig. In einer konkreteren Form ließt sich diese Gleichung

$$i\int \Phi(A)\partial_t\Psi_t(A)\,P(dA)$$
$$= \int\left(\frac{1}{2}\int (D_A\Phi(A))(x)\cdot(D_A\Psi_t(A))(x)\,dx + \Phi(A)\langle J_t, A\rangle\Psi_t(A)\right)\,P(dA).$$

Es stellt sich sofort die Frage, für welche J diese Gleichung Sinn macht. J sollte aus $h = \overline{V'}^Q$ sein, damit $\langle J,\cdot\rangle$ ein Element der P-Gaußschen Familie ist. Wir wollen hier nicht diskutieren, was wir unter einer Lösung von (18) zu verstehen haben. Stattdessen werden wir im Kapitel 7 direkt eine unitäre Zeitentwicklung konstruieren, welche die Dynamik der Lösungen dieser Gleichung beschreibt. Im Abschnitt 7.4 kommen wir auf die Klärung des Lösungsbegriffes zurück.

6.2 Bewegungsgleichung des zweitquantisierten Photonenfeldes über klassischem Fockraum

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen Gleichung (18) und der bekannten Bewegungsgleichung[17] für das zweitquantisierte Photonenfeld in der klas-

[17] [8]

sischen Fockraumformulierung herstellen. Wir transportieren die Gleichung auf $L^2(V,P)$ also mit dem Isomorphismus aus (11) auf den Fockraum $\bigoplus_{n=0}^{\infty}(h,Q)^{\tilde{\otimes} n}$. Dazu wählen wir eine Orthonormalbasis $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ von h in $\mathcal{S}$, führen die Kurznotation für die Operatoren a und a^* aus Gleichung (3) ein und verwenden (12).

$$\begin{aligned}
&i\partial_t Q(F\Phi, F\Psi_t)\\
&= i\partial_t E[\Phi\,\Psi_t]\\
&= E\left[\frac{1}{2}m^{-1}(D\Phi, D\Psi_t) + \Phi\langle J_t, \cdot\rangle\Psi_t\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{\infty} m^{-1}(e_k, e_l)\, Q(a_k F\Phi, a_l F\Psi_t) + \sum_{k=1}^{\infty} Q(J_t, e_k)\, Q(F\Phi, (a_k + a_k^*)F\Psi_t)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{\infty} m^{-1}(e_k, e_l)\, Q(F\Phi, a_k^* a_l F\Psi_t) + \sum_{k=1}^{\infty} Q(J_t, e_k)\, Q(F\Phi, (a_k + a_k^*)F\Psi_t)
\end{aligned}$$

Wir definieren nun auch den Energieoperator ω auf V'. Sei also

$$\omega : H^{2,2} \to H^{1,2}, a \mapsto \mathcal{F}^{-1}|\cdot|\hat{a}.$$

Dies ist wohldefiniert, weil

- $|\cdot|\hat{a} \in H^{0,1}$
- $\partial_l|\cdot|\hat{a} = \frac{k_l}{|k|}\hat{a} + |k|\partial_l\hat{a} \in H^{0,1}$
- $\partial_j\partial_l|\cdot|\hat{a} = \left(\frac{\delta_{j,l}}{|k|} - \frac{k_l k_j}{|k|^3}\right)\hat{a} + \frac{k_j}{|k|}\partial_l\hat{a} + \frac{k_l}{|k|}\partial_j\hat{a} + |k|\partial_l\partial_j\hat{a} \in H^{0,1}$,

wie man mit der Hardy-Ungleichung leicht sieht. Mit dieser Definition erhalten wir:

$$\frac{1}{2}m^{-1}(e_k, e_l) = \frac{1}{2}\int e_k(x)\cdot e_l(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overline{\widehat{e_k}}(k)\cdot(|k|\widehat{e_l}(k))}{|k|}\,dk = Q(e_k, \omega e_l).$$

Setzen wir noch $J_t^k := Q(J_t, e_k)$, so ergibt sich die bekannte Version der Photonenfeldgleichung:

$$i\partial_t F\Psi_t = \sum_{k,l=1}^{\infty} Q(e_k, \omega e_l) a_k^* a_l F\Psi_t + \sum_{k=1}^{\infty} J_t^k (a_k + a_k^*) F\Psi_t \tag{19}$$

6.3 Lösung der freien Photonenfeldgleichung

Die freie Photonenfeldgleichung ist (19) bzw. (18) mit $J_t = 0$. Der im vorigen Abschnitt definierte Energieoperator ω besitzt in h eine selbstadjungierte

Erweiterung, da er symmetrisch und nichtnegativ ist und die zugehörige quadratische Form, also das L^2-Skalarprodukt, ist natürlich abschließbar. Nun sieht man sofort, dass

$$i\partial_t F\Psi_t = \sum_{k,l=1}^{\infty} Q(e_k, \omega e_l) a_k^* a_l F\Psi_t \tag{20}$$

der Lift der „1-Photon-Gleichung“ $i\partial_t a = \omega a$ auf den Bosonischen Fockraum ist. Ist also $U_t := e^{-i\,t\,\omega}$ die unitäre 1-Photon-Entwicklung, so stellt der Lift $\bigoplus_{m=0}^{\infty} U_t^{\otimes m}$ die unitäre Zeitentwicklung der freien Photonengleichung (20) dar.

7 Unitäre Dynamik des zweitquantisierten Photonenfeldes mit externem Strom

7.1 Endlichdimensionale Vorüberlegung

Unsere Idee zur Konstruktion der zur Photonenfeldgleichung (18) gehörenden unitären Dynamik in diesem Kapitel ist es, die Zeitentwicklung zunächst für Anfangsbedingungen der einfachen Form $\Psi_0 = \exp(\langle b, \cdot\rangle)$ zu untersuchen. Für diese werden wir eine explizite Form von Ψ_t angeben können. Danach setzen wir die entsprechenden isometrischen Abbildungen auf ganz $L^2(V, P)$ zu unitären Operatoren fort. In diesem Abschnitt werden wir unsere Untersuchung zunächst im Fall des n-dimensionalen Harmonischen Oszillators durchführen. Wir betrachten also die Gleichung

$$iE[\phi\, \partial_t \psi_t] = E\left[\frac{1}{2} m^{-1}(d\phi, d\psi_t) + \phi\langle f_t, \cdot\rangle \psi_t\right] \qquad \forall \phi \in C_0^\infty$$

auf $L^2(V, dP = |\psi_{GZ}|^2 dx)$. Aus den Überlegungen der Abschnitte 5.2 und 5.3 wissen wir schon, dass

$$\psi(t,x) = \int P(dy)\, \alpha_{-it,HO}^{-iT}(x,y)\, \phi(y)$$

diese Gleichung für $f_t = 0$ mit der Randbedingung $\psi(T,x) = \phi(x)$ löst. Dabei ist mit $\Delta t := T - t$

$$\begin{aligned}\alpha_{-it,HO}^{-iT}(x,y) &= (\det m)^{-\frac{1}{2}} (\det \frac{\pi}{\omega})^{-1} \left(\det(1 - e^{2i\omega\Delta t})\right)^{-\frac{1}{2}} \exp[m(y, \omega y)] \\ &\exp\left[\frac{1}{2i} m \left(e^{-\frac{1}{2}i\omega\Delta t} y - e^{\frac{1}{2}i\omega\Delta t} x, \frac{\omega}{\sin(\omega\Delta t)} (e^{-\frac{1}{2}i\omega\Delta t} y - e^{\frac{1}{2}i\omega\Delta t} x)\right)\right].\end{aligned}$$

Bezeichne nun $U_{t,T}^0$ die entsprechende freie unitäre Dynamik, d.h. die Zeitentwicklung des freien Harmonischen Quantenoszillators in n Dimensionen. Dann zeigt die folgende Rechnung, dass

$$U_{t,T}^0\, e^{\langle b, \cdot\rangle} = e^{-\frac{1}{2} Q(b, (e^{2i\omega(T-t)} - 1)b) + \langle e^{i\omega(T-t)} b, \cdot\rangle}$$

ist. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir wie bereits im Abschnitt 5.2 an, dass m das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist. Dann ergibt sich mit der Substitution $u = e^{-\frac{1}{2}i\omega(T-t)}y - e^{\frac{1}{2}i\omega(T-t)}x$ in $(\star)$:

$$
\begin{aligned}
&\left(U^0_{t,T}\, e^{\langle b,\cdot\rangle}\right)(x) \\
&= \int P(dy)\, \alpha^{-iT}_{-it,HO}(x,y)\, e^{b^t y} \\
&= \left(\det \frac{\pi}{\omega}\left((1-e^{2i\omega\Delta t})\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \int dy\, \exp[b^t y] \\
&\qquad \exp\left[\frac{1}{2i}\left(e^{-\frac{1}{2}i\omega\Delta t}y - e^{\frac{1}{2}i\omega\Delta t}x\right)^t \frac{\omega}{\sin(\omega\Delta t)}\left((e^{-\frac{1}{2}i\omega\Delta t}y - e^{\frac{1}{2}i\omega\Delta t}x)\right)\right] \\
&\underset{(\star)}{=} \left(\det \frac{\pi}{\omega}\left((e^{-i\omega\Delta t} - e^{i\omega\Delta t})\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&\qquad \int du\, \exp\left[-\frac{1}{2}u^t \frac{i\omega}{\sin(\omega\Delta t)}u + b^t\left(e^{\frac{1}{2}i\omega\Delta t}u + e^{i\omega\Delta t}x\right)\right] \\
&= \left(\det \frac{-2\pi i}{\omega}\sin(\omega\Delta t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\det 2\pi \frac{\sin(\omega\Delta t)}{i\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \exp[b^t e^{i\omega\Delta t}x] \\
&\qquad \exp\left[\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}i\omega\Delta t}b)^t \frac{\sin(\omega\Delta t)}{i\omega} e^{\frac{1}{2}i\omega\Delta t}b - \frac{1}{4}b^t\frac{e^{2i\omega\Delta t}-1}{\omega}b\right] \exp[(e^{i\omega\Delta t}b)^t x].
\end{aligned}
$$

Nachdem wir nun die freie Entwicklung von $\exp(\langle b,\cdot\rangle)$ kennen, sind wir an der Zeitentwicklung $U_{t,T}$ mit externer Kraft interessiert. Wieder mit den Resultaten aus den Abschnitten 5.2 und 5.3 haben wir

$$
(U_{t,T}\,\phi)(x) = \int P(dy)\, \alpha^{-iT}_{-it,HO}(x,y)\, \beta^{-iT}_{-it}(x,y)\, \phi(y) = U^0_{t,T}\left(\beta^{-iT}_{-it}(x,\cdot)\,\phi\right),
$$

wobei der die Wechselwirkung mit der externen Kraft enthaltende Faktor

$$
\begin{aligned}
&\beta^{-iT}_{-it}(x,y) \\
&\quad = \exp\left[i\sigma^T_t + i\langle \int_t^T d\tau \frac{\sin(\omega(T-\tau))}{\sin(\omega(T-t))} f_\tau, x\rangle + i\langle \int_t^T d\tau \frac{\sin(\omega(\tau-t))}{\sin(\omega(T-t))} f_\tau, y\rangle\right]
\end{aligned}
$$

ist und wir σ_t^T noch nicht bestimmt haben. Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&(U_{t,T} e^{\langle b,\cdot\rangle})(x) \\
&= \exp\left[i\sigma_t^T + i\langle \int_t^T d\tau \frac{\sin(\omega(T-\tau))}{\sin(\omega(T-t))} f_\tau, x\rangle \right] \\
&\quad \left(U_{t,T}^0 \left(\exp\left[i\langle b + \int_t^T d\tau \frac{\sin(\omega(\tau-t))}{\sin(\omega(T-t))} f_\tau, \cdot\rangle \right] \right) \right)(x) \\
&= \exp\Bigg[i\sigma_t^T + i\langle e^{i\omega(T-t)} b, x\rangle \\
&\quad + \int_t^T d\tau \frac{\sin(\omega(T-\tau))}{\sin(\omega(T-t))} f_\tau + ie^{i\omega(T-t)} \int_t^T d\tau \frac{\sin(\omega(\tau-t))}{\sin(\omega(T-t))} f_\tau, x\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(Q(e^{2i\omega(T-t)} - 1) \Big) \left[b + \int_t^T d\tau \frac{\sin(\omega(\tau-t))}{\sin(\omega(T-t))} f_\tau \right] \Bigg] \\
&= \exp\Bigg[i\sigma_t^T + 2Q(b, e^{i\omega(T-t)} \int_t^T d\tau \sin(\omega(\tau-t)) f_\tau) \\
&\quad + iQ\left(\int_t^T d\tau \sin(\omega(\tau-t)) f_\tau, \frac{e^{i\omega(T-t)}}{\sin(\omega(T-t))} \int_t^T d\tau \sin(\omega(\tau-t)) f_\tau \right) \\
&\quad + \langle e^{i\omega(T-t)} b + i \int_t^T d\tau e^{i\omega(\tau-t)} f_\tau, x\rangle - iQ(b, e^{i\omega(T-t)} \sin(\omega(T-t)) b) \Bigg].
\end{aligned}
$$

Dieses Resultat wollen wir im Folgenden auf den unendlichdimensionalen Fall verallgemeinern.

7.2 Konstruktion der Zeitentwicklung

Um die Photonenfeldgleichung (18) zu lösen, müssen wir zunächst komplexwertige $L^2(V,P)$-Funktionen zulassen. Wir bezeichnen von nun an mit dem Index $\mathbb{C}$ die Komplexifizierung eines Vektorraumes. Wir setzen dann alle zuvor definierten linearen Abbildungen $\mathbb{C}$-linear fort. Man beachte, dass alle quadratischen Formen somit $\mathbb{C}$-bilinear und nicht etwa sesquilinear werden. Sei

$$W := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(e^{\langle b,\cdot\rangle} : b \in h_{\mathbb{C}}).$$

Dann liegt W in $L^2_{\mathbb{C}}(V,P)$ dicht.[18] Außerdem ist die Familie $(e^{\langle b,\cdot\rangle} : b \in h_{\mathbb{C}})$ eine Basis von W. Nun müssen wir einige Voraussetzungen an die Regularität des externen Stromes stellen, um die Existenz der unitären Zeitentwicklung zu sichern. Sei also im Folgenden J ein regulärer Strom wie nachstehend definiert.

[18] [4]

Definition:
J heißt regulärer Strom, wenn

- $(\tau, x) \mapsto J_\tau(x)$ messbar
- $J_\tau \in h$ für alle τ
- $\tau \mapsto Q[J_\tau] \in L^1(d\tau)$

Wir führen noch folgende Kurznotationen ein:

- $s(\tau) := \sin(\omega\tau)$
- $c(\tau) := \cos(\omega\tau)$
- $\int_\tau f(\tau) := \int_{\tau\in[t,T]} f(\tau) := \int_t^T d\tau f(\tau) J_\tau$ für eine Funktion f mit Werten in den Operatoren über $h_{\mathbb{C}}$, für welche die rechte Seite Sinn macht

Das Integral ändert dabei das Vorzeichen, falls die untere Grenze größer ist als die obere. Hierbei ist ω immer die Multiplikation mit dem Absolutbetrag im Fourierraum, verstanden als selbstadjungierter Operator mit Definitionsbereich $\{a \in h_{\mathbb{C}} : \int |\cdot||\hat{a}|^2 < \infty\}$ und Werten in $h_{\mathbb{C}}$. Wir setzen nun, motiviert durch unsere Ergebnisse aus dem vorhergehenden Abschnitt:

$$U_{t,T} e^{\langle b, \cdot\rangle} := \exp\Big[i\chi_t^T + 2Q(b, e^{i\omega(T-t)} \int_\tau s(\tau - t)) - iQ(b, e^{i\omega(T-t)} s(T-t) b) \\ + \langle e^{i\omega(T-t)} b + i \int_\tau e^{i\omega(\tau - t)}, \cdot\rangle\Big] \tag{21}$$

mit

$$\chi_t^T := i \int_t^T d\tau\, Q(\int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{i\omega(\sigma-\tau)}, J_\tau) - \frac{i}{2} Q[\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)}] \tag{22}$$

Um die Wohldefiniertheit dieses Ausdrucks zu prüfen, also zu sehen, dass die Integrale existieren, beweisen wir zunächst folgendes

Lemma 1:
$h = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3, \frac{dk}{|k|}) \otimes \mathbb{C}^3 : u(-k) = \overline{u(k)},\ k \cdot u = 0\}$ im Fourierraum

Beweis:
Da die rechte Seite abgeschlossen ist, ist die Inklusion „$\subseteq$“ klar. Wir wollen für $0 \leq \phi \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\phi|_{B_{\frac{1}{2}}} = 1$, $\phi_\epsilon := \epsilon^{-3}\phi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right)$ und $f_\alpha := \phi(\alpha\cdot) - \phi\left(\frac{\cdot}{\alpha}\right)$ zeigen, dass

$$\left(u \star \phi_\epsilon - k\frac{k \cdot (u \star \phi_\epsilon)}{|k|^2}\right) f_\alpha \xrightarrow[\epsilon\to 0]{Q} u\, f_\alpha \xrightarrow[\alpha\to 0]{Q} u$$

für alle u in der rechten Seite gilt. Die erste Konvergenz folgt dabei, weil

$$\int \frac{|(u \star \phi_\epsilon) f_\alpha - u\, f_\alpha|^2}{|k|} \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B_{\frac{1}{\alpha}}(0) \setminus B_\alpha(0)} |u \star \phi_\epsilon - u|^2 \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

und ebenso $k \cdot (u \star \phi_\epsilon) \to k \cdot u = 0$. Die Majorante $|u\, f_\alpha| \leq \|\phi\|_\infty |u|$ liefert die zweite Konvergenz. $\square$

Die Regularitätsbedingung an J wird damit

$$\int_t^T d\tau \int \frac{dk}{|k|} |\widehat{J_\tau}|^2 < \infty,$$

d.h. $J \in L^2(d\tau \otimes \frac{dk}{|k|})$. Für irgendein $u \in L^2(d\tau \otimes \frac{dk}{|k|})$ gilt aber

$$Q[\int_t^T d\tau\, u_\tau] = (T-t)^2 \int \frac{dk}{|k|} \left| \frac{1}{T-t} \int_t^T d\tau\, u_\tau \right|^2 \underset{\text{Jensen}}{\leq} (T-t)\, \|u\|_{L^2}^2$$

und damit $\int_t^T d\tau\, u_\tau \in h$. Weiter ist

$$\omega : \{u \in h_{\mathbb{C}} : \int |k||u|^2 < \infty\} \to h_{\mathbb{C}}$$

als Multiplikationsoperator selbstadjungiert, also $e^{i\omega\tau}$ unitär. Es folgt, dass auch

$$\int_\tau e^{\pm i\omega(\tau - t)} \in h_{\mathbb{C}}.$$

Zuletzt ist der erste Summand in χ_t^T wohldefiniert, wegen

$$\int_t^T d\tau \left| Q(\int_{\sigma \in [\tau, T]} e^{i\omega(\sigma - t)}, J_\tau) \right| \leq \int_t^T d\tau \int_\tau^T d\sigma \sqrt{Q[J_\sigma]} \sqrt{Q[J_\tau]} < \infty.$$

$U_{t,T}$ ist damit nach $\mathbb{C}$-linearer Fortsetzung eine wohldefinierte Abbildung von W in sich selbst. Wir zeigen nun

Lemma 2:
$U_{t,T} : W \to W$ ist isometrisch.

Beweis:
Es reicht offenbar die Isometrieeigenschaft auf Basiselementen von W zu prüfen.

Seien also $a, b \in h_{\mathbb{C}}$.

$$
\begin{aligned}
&E[\overline{U_{t,T}e^{\langle a,\cdot\rangle}}\, U_{t,T}e^{\langle b,\cdot\rangle}] \\
&= \exp\Bigg[-2\int_t^T d\tau\, Q(\int_{\sigma\in[\tau,T]} c(\sigma-\tau), J_\tau) + Q[\int_\tau c(\tau-t)] - Q[\int_\tau s(\tau-t)] \\
&\qquad + 2\,Q(\bar{a}+b, c(T-t)\int_\tau s(\tau-t)) + 2i\,Q(b-\bar{a}, s(T-t)\int_\tau s(\tau-t)) \\
&\qquad - i\,Q(b, e^{i\omega(T-t)}s(T-t)b) + i\,Q(\bar{a}, e^{-i\omega(T-t)}s(T-t)\bar{a}) \\
&\qquad + \frac{1}{2}Q[e^{-i\omega(T-t)}\bar{a} + e^{i\omega(T-t)}b - 2\int_\tau s(\tau-t)]\Bigg] \\
&= \exp\Bigg[\frac{1}{2}Q[\bar{a}] + \frac{1}{2}Q[b] + Q(\bar{a}, b) - 2\int_t^T d\tau\, Q(\int_{\sigma\in[\tau,T]} c(\sigma-\tau), J_\tau) \\
&\qquad + Q[\int_\tau c(\tau-t)] + Q[\int_\tau s(\tau-t)]\Bigg] \\
&= \exp\Bigg[\frac{1}{2}Q[\bar{a}] + \frac{1}{2}Q[b] + Q(\bar{a}, b) - 2\int_t^T d\tau\, Q(\int_{\sigma\in[\tau,T]} c(\sigma-\tau), J_\tau) \\
&\qquad + \int_t^T d\tau \int_t^T d\sigma\, Q(J_\tau, (c(\tau-\sigma) - s(\tau-t)s(\sigma-t))J_\sigma) + Q[\int_\tau s(\tau-t)]\Bigg] \\
&= \exp\left[\frac{1}{2}Q[\bar{a}+b]\right] \\
&= E[\overline{e^{\langle a,\cdot\rangle}}\, e^{\langle b,\cdot\rangle}]
\end{aligned}
$$

□

Wir können also $U_{t,T}$ auf ganz $L^2_{\mathbb{C}}(V,P)$ isometrisch fortsetzen. Für diese Fortsetzung beweisen wir nun unseren zentralen Satz dieses Kapitels.

Satz:
$U_{t,T}$ ist eine zweiparametrige Familie unitärer Operatoren auf $L^2_{\mathbb{C}}(V,P)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $U(t,t) = 1 \qquad \forall t$
2. $(t,T) \mapsto U_{t,T}$ ist stetig bezüglich der starken Operatortopologie.
3. $U_{t,s}\, U_{s,T} = U_{t,T} \qquad \forall t, s, T$

Beweis:
Bei 1. ist nichts zu zeigen. Zeigen wir also nun die Stetigkeit von $U_{t,T}$ in den Zeitargumenten. Zunächst konvergieren die Integrale in (21) in h, denn für $u \in$

$L^2(d\tau \otimes \frac{dk}{|k|})$ und Folgen reeller Zahlen $\lambda_n \to \lambda$, $t_n \to t$ und $T_n \to T$ hat

$$v_n := e^{i|k|\lambda_n} e^{\pm i|k|(\tau - t_n)} u_\tau(k) \mathbb{1}_{[t_n, T_n]}(\tau)$$

für große n die Majorante $|u_\tau| \mathbb{1}_{[t-\epsilon, T+\epsilon](\tau)}$, konvergiert also in $L^2(d\tau \otimes \frac{dk}{|k|})$ gegen

$$v := e^{i|k|\lambda} e^{\pm i|k|(\tau - t)} u_\tau(k) \mathbb{1}_{[t,T]}(\tau).$$

Damit und mit

$$Q[\int_{t-\epsilon}^{T+\epsilon} (v_n - v)] \leq |T - t + 2\epsilon| \, \|v_n - v\|^2_{L^2(d\tau \otimes \frac{dk}{|k|})}$$

erhalten wir

$$e^{i\omega\lambda_n} \int_{t_n}^{T_n} d\tau \, e^{\pm i\omega(\tau - t_n)} u_\tau \xrightarrow{Q} e^{i\omega\lambda} \int_t^T d\tau \, e^{\pm i\omega(\tau - t)} u_\tau.$$

Es bleibt noch der erste Summand in (22), der Definition von χ_t^T, der nicht direkt von dieser Form ist. Hier haben wir

$$\begin{aligned}
&\int_{t_n}^{T_n} d\tau \, Q(\int_{\sigma \in [\tau, T_n]} e^{i\omega(\sigma - \tau)}, J_\tau) \\
&\qquad = \int_{t-\epsilon}^{T+\epsilon} d\tau \int_{t-\epsilon}^{T+\epsilon} d\sigma \int \frac{dk}{|k|} e^{-i|k|(\sigma - \tau)} \widehat{J_\sigma} \cdot \widehat{J_\tau} \mathbb{1}_{[t_n, T_n] \times [\tau, T_n]}(\tau, \sigma)
\end{aligned}$$

und mit der Majorante

$$|\widehat{J_\sigma}(k)| |\widehat{J_\tau}(k)| \mathbb{1}_{[t-\epsilon, T+\epsilon]^2}(\sigma, \tau) \in L^1(d\sigma \otimes d\tau \otimes \frac{dk}{|k|})$$

erhalten wir auch hier Konvergenz. Damit bleibt für 2. nur noch zu zeigen, dass aus $b_n \xrightarrow{h} b$ auch $e^{\langle b_n, \cdot \rangle} \to e^{\langle b, \cdot \rangle}$ in $L^2(V, P)$ folgt. Dies sieht man mit

$$\begin{aligned}
&E\left[\left| e^{\langle b_n, \cdot \rangle} - e^{\langle b, \cdot \rangle} \right|^2 \right] \\
&= E\left[e^{\langle b_n + \overline{b_n}, \cdot \rangle} + e^{\langle b + \bar{b}, \cdot \rangle} - e^{\langle b + \overline{b_n}, \cdot \rangle} - e^{\langle b_n + \bar{b}, \cdot \rangle} \right] \\
&= e^{\frac{1}{2} Q[b_n + \overline{b_n}]} + e^{\frac{1}{2} Q[b + \bar{b}]} - e^{\frac{1}{2} Q[b + \overline{b_n}]} - e^{\frac{1}{2} Q[b_n + \bar{b}]} \to 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir so die Stetigkeit von U auf W gezeigt. Für beliebiges $\Psi \in L^2(V, P)$ wählen wir ein $\Phi \in W$, das Ψ approximiert und benutzen

$$\begin{aligned}
&\|U_{t_n, T_n} \Psi - U_{t,T} \Psi\|_{L^2} \\
&\leq \|U_{t_n, T_n} \Psi - U_{t_n, T_n} \Phi\|_{L^2} + \|U_{t_n, T_n} \Phi - U_{t,T} \Phi\|_{L^2} + \|U_{t,T} \Phi - U_{t,T} \Psi\|_{L^2} \\
&= 2 \|\Phi - \Psi\|_{L^2} + \|U_{t_n, T_n} \Phi - U_{t,T} \Phi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Als letztes zeigen wir nun die Kompositionseigenschaft 3., aus der auch mit Lemma 2 sofort die Unitarität von $U_{t,T}$ folgt. Sei also wieder $b \in h_{\mathbb{C}}$.

$$
\begin{aligned}
&U_{t,r}U_{r,T}e^{\langle b,\cdot\rangle} \\
&= \exp\Bigg[i\chi_t^r + i\chi_r^T + 2\,Q(b, e^{i\omega(T-r)}\int_{\tau\in[t,r]} s(\tau-t)) - i\,Q(b, e^{i\omega(T-r)}s(T-r)b) \\
&\quad + 2\,Q(e^{i\omega(T-r)}b + i\int_{\tau\in[r,T]} e^{i\omega(\tau-r)}, e^{i\omega(r-t)}\int_{\tau\in[t,r]} s(\tau-t)) \\
&\quad - i\left(Q(e^{i\omega(r-t)}s(r-t))\right)\left[e^{i\omega(T-r)}b + i\int_{\tau\in[r,T]} e^{i\omega(\tau-r)}\right] \\
&\quad + \langle e^{i\omega(r-t)}\left(e^{i\omega(T-r)}b + i\int_{\tau\in[r,T]} e^{i\omega(\tau-r)}\right) + i\int_{\tau\in[t,r]} e^{i\omega(\tau-t)}, \cdot\rangle\Bigg] \\
&= \exp\left[i\left(\chi_t^r + \chi_r^T + 2\,Q(\int_{\tau\in[r,T]} e^{i\omega(\tau-r)}, e^{i\omega(r-t)}\int_{\tau\in[t,r]} s(\tau-t))\right)\right] \qquad (23) \\
&\quad \exp\Bigg[2\,Q(b, e^{i\omega(T-r)}\int_{\tau\in[r,T]} s(\tau-r) + e^{i\omega(T-t)}\int_{\tau\in[t,r]} s(\tau-t)) \\
&\qquad + 2\,Q(b, e^{i\omega(T-t)}s(r-t)\int_{\tau\in[r,T]} e^{i\omega(\tau-r)})\Bigg] \qquad (24) \\
&\quad \exp\left[-iQ(b, \left(e^{i\omega(T-r)}s(T-r) + e^{i\omega(T-t)}s(r-t)e^{i\omega(T-r)}\right)b)\right] \qquad (25) \\
&\quad \exp\left[\langle e^{i\omega(T-t)}b + i\int_{\tau\in[t,T]} e^{i\omega(\tau-t)}, \cdot\rangle\right]
\end{aligned}
$$

Wir berechnen nun die Terme in den Exponenten der drei nummerierten Gleichungen.

Exponent von (24):

$$
\begin{aligned}
&= e^{i\omega(T-t)}\int_{\tau\in[r,T]} \left(e^{-i\omega(r-t)}s(\tau-r) + e^{i\omega(\tau-r)}s(r-t)\right) \\
&\quad + e^{i\omega(T-t)}\int_{\tau\in[t,r]} s(\tau-t) \\
&= e^{i\omega(T-t)}\int_{\tau\in[t,T]} s(\tau-t)
\end{aligned}
$$

Exponent von (25):

$$
= e^{i\omega(T-t)}\left(e^{-i\omega(r-t)}s(T-r) + e^{i\omega(T-r)}s(r-t)\right) = e^{i\omega(T-t)}s(T-t)
$$

Exponent von (23):

$$\begin{aligned}
&= i\int_t^r d\tau Q(\int_{\sigma\in[\tau,r]} e^{i\omega(\sigma-\tau)}, J_\tau) + i\int_r^T d\tau Q(\int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{i\omega(\sigma-\tau)}, J_\tau)\\
&\quad - \frac{i}{2}Q[\int_{\tau\in[t,r]} e^{i\omega(\tau-t)}] - \frac{i}{2}Q[\int_{\tau\in[r,T]} e^{i\omega(\tau-r)}]\\
&\quad + 2Q(\int_{\tau\in[r,T]} e^{i\omega(\tau-t)}, \int_{\tau\in[t,r]} s(\tau-t))\\
&\quad + Q(\int_{\tau\in[r,T]} e^{i\omega(\tau-r)}, s(r-t)\int_{\tau\in[r,T]} e^{i\omega(\tau-t)})\\
&= i\int_t^T d\tau Q(\int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{i\omega(\sigma-\tau)}, J_\tau) - i\int_t^r d\tau Q(\int_{\sigma\in[r,T]} e^{i\omega(\sigma-t)}e^{-i\omega(\tau-t)}, J_\tau)\\
&\quad - \frac{i}{2}Q[\int_{\tau\in[t,T]} e^{i\omega(\tau-t)}] + iQ(\int_{\tau\in[r,T]} e^{i\omega(\tau-t)}, \int_{\tau\in[t,r]} e^{-i\omega(\tau-t)})\\
&= \chi_t^T
\end{aligned}$$

$\square$

Wir haben nun die unitäre Zeitentwicklung zur Bewegungsgleichung des zweitquantisierten Photonenfeldes konstruiert. Dass diese unitäre Familie tatsächlich mit dieser Gleichung zusammenhängt, werden wir im nächsten Abschnitt klären.

7.3 Die unitäre Dynamik und die Bewegungsgleichung

Wir zeigen nun, dass die im vorangegangenen Abschnitt konstruierte Zeitentwicklung $U_{t,T}$ die Photonenfeldgleichung (18) in einem speziellen schwachen Sinne löst.

Lemma:
Für alle $a \in h$ mit $\omega a \in h$, d.h. a im Definitionsbereich des Operators ω, und $b \in h_{\mathbb{C}}$ erfüllen $\Phi := e^{\langle a,\cdot\rangle}$ und $\Psi_t := U_{t,T}e^{\langle b,\cdot\rangle}$ die Gleichung

$$i\,(E[\Phi\,\Psi_T] - E[\Phi\,\Psi_t]) = \int_t^T d\tau E[Q(\omega D\Phi, D\Psi_\tau) + \Phi\langle J_\tau,\cdot\rangle\Psi_\tau].$$

Beweis:
Zuerst untersuchen wir $E[\Phi\,\Psi_t]$, wobei wir in $(\star)$ die Voraussetzung $\omega a \in h$

benutzen und χ_t^T so gewählt wurde, dass $(\star\star)$ erfüllt ist.

$$
\begin{aligned}
&E[\Phi\,\Psi_t] \\
&= \exp\left[i\chi_t^T + 2Q(b, e^{i\omega(T-t)}\int_\tau s(\tau-t)) - iQ(b, e^{i\omega(T-t)}s(T-t)b)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}Q[a + e^{i\omega(T-t)}b + i\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)}]\right] \\
&= \exp\left[i\chi_t^T + \frac{1}{2}Q(a + e^{i\omega(T-t)}b + i\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)}, i\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)})\right. \\
&\qquad + Q(a, e^{i\omega(T-t)}b) + \frac{1}{2}Q(a + e^{i\omega(T-t)}b, i\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)}) \\
&\qquad \left. + 2Q(b, e^{i\omega(T-t)}\int_\tau s(\tau-t)) + \frac{1}{2}Q[a] + \frac{1}{2}Q[b]\right] \\
&= \exp\left[i\chi_t^T - \frac{1}{2}Q[\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)}] + iQ(a, \int_\tau e^{i\omega(\tau-t)})\right. \\
&\qquad \left. + iQ(b, \int_\tau e^{i\omega(T-\tau)}) + Q(a, (e^{i\omega(T-t)} - 1)b) + \frac{1}{2}Q[a+b]\right] \\
&\underset{(\star)}{=} \exp\left[i\chi_t^T - \frac{1}{2}Q[\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)}] - i\int_t^T d\tau\,\partial_\tau \int_\tau^T d\sigma\, Q(e^{i\omega(\sigma-\tau)}a, J_\sigma)\right. \\
&\qquad \left. + i\int_t^T d\tau\, Q(e^{i\omega(T-\tau)}b, J_\tau) + Q(\int_t^T d\tau\,\partial_\tau e^{i\omega(\tau-t)}a, b) + \frac{1}{2}Q[a+b]\right] \\
&\underset{(\star\star)}{=} \exp\left[\int_t^T d\tau \left(-Q(\int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{i\omega(\sigma-\tau)}, J_\tau) + iQ(a, J_\tau)\right)\right. \\
&\qquad + \int_t^T d\tau \left(-Q(\omega a, \int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{i\omega(\sigma-\tau)}) + iQ(e^{i\omega(T-\tau)}b, J_\tau)\right) \\
&\qquad \left. + i\int_t^T d\tau \left(Q(\omega a, e^{i\omega(\tau-t)}b)\right) + \frac{1}{2}Q[a+b]\right]
\end{aligned}
$$

Damit erfüllt $E[\Phi\,\Psi_t]$ die folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&i(E[\Phi\,\Psi_T] - E[\Phi\,\Psi_t]) \\
&= \int_t^T d\tau \Bigg(iQ(\int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{i\omega(\sigma-\tau)}, J_\tau) + Q(a, J_\tau) + iQ(\omega a, \int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{i\omega(\sigma-\tau)}) \\
&\qquad + Q(e^{i\omega(T-\tau)}b, J_\tau) + Q(\omega a, e^{i\omega(\tau-t)}b) \Bigg) E[\Phi\,\Psi_\tau] \\
&= \int_t^T d\tau\, E\left[Q(\omega a, e^{i\omega(\tau-t)}b + i\int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{i\omega(\sigma-\tau)})\Phi\,\Psi_\tau \right] \\
&= \int_t^T d\tau E\left[Q(J_\tau, e^{i\omega(\tau-t)}b + i\int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{i\omega(\sigma-\tau)})\Phi\,\Psi_\tau + Q(J_\tau, a)\Phi\,\Psi_\tau \right] \\
&= \int_t^T d\tau E\left[Q(\omega D\Phi, D\Psi_\tau) + Q(J_\tau, D\Psi_\tau)\Phi + Q(J_\tau, D\Phi)\Psi_\tau \right] \\
&\underset{(\star)}{=} \int_t^T d\tau E\left[Q(\omega D\Phi, D\Psi_\tau) + \Phi\langle J_\tau, \cdot\rangle\Psi_\tau \right],
\end{aligned}
$$

was genau die Behauptung ist. Hierbei haben wir in $(\star)$ die partielle Integrationsformel aus Appendix A.3 für die Mallivin-Ableitung verwendet. □

Bemerkung:
In diesem Lemma wurde χ_t^T eingesetzt wie in (22) definiert. Diese Definition ist durch exakt diese Rechnung motiviert, d.h. χ_t^T wurde so gewählt, dass die Dynamik die Bewegungsgleichung erfüllt.

7.4 Eindeutigkeit der Dynamik

Wir wollen nun ein Eindeutigkeitsresultat für die Lösung der Photonenfeldgleichung zeigen. Dazu werden wir die Forderungen an die Regularität des externen Stromes etwas verschärfen müssen. Außerdem müssen wir klären, was genau wir unter einer Lösung der Gleichung verstehen wollen. In der folgenden Definition erscheint der Divergenzoperator aus Appendix A.3.

Definition:
Eine stetige Abbildung $\tau \mapsto \Psi_\tau \in L^2(V, P)$ heißt schwache Lösung der Photonenfeldgleichung (18), falls für alle $\Phi = e^{\langle a,\cdot\rangle}$ mit $a \in h$ und $\omega a \in h$ die Gleichung

$$iE[\Phi(\Psi_T - \Psi_t)] = \int_t^T d\tau E[Q(\delta\omega D\Phi, \Psi_\tau) + \Phi\langle J_\tau, \cdot\rangle\Psi_\tau]$$

für alle t erfüllt ist.

Voraussetzungen an den externen Strom
Wir setzen für den Rest dieses Abschnitts zusätzlich zur Regularität des Stromes voraus, dass $\tau \mapsto J_\tau \in h$ stetig ist und $\tau \mapsto Q[\omega J_\tau] \in L^1(d\tau)$, d.h. insbesondere, dass J_τ im Definitionsbereich von ω liegt.

Wir benötigen nun einige vorbereitende Lemmata, um zu zeigen, dass sich alle schwachen Lösungen mit Hilfe unserer Zeitentwicklung konstruieren lassen.

Lemma 1:
Sei $a \in h$ mit $\omega a \in h$ und $\Phi := e^{\langle a,\cdot\rangle}$. Dann ist $t \mapsto U_{t,T}\Phi \in L^4_{\mathbb{C}}(V,P)$ stetig.

Bemerkung:
An dieser Stelle werden die neuen Voraussetzungen an J noch nicht gebraucht.

Beweis:
Zunächst ist die Abbildung $h_{\mathbb{C}} \ni b \mapsto e^{\langle b,\cdot\rangle} \in L^4_{\mathbb{C}}(V,P)$ stetig, denn

$$\begin{aligned}
&E[|e^{\langle a,\cdot\rangle} - e^{\langle b,\cdot\rangle}|^4] \\
&= E[(e^{\langle a,\cdot\rangle} - e^{\langle b,\cdot\rangle})^2(e^{\langle \bar{a},\cdot\rangle} - e^{\langle \bar{b},\cdot\rangle})^2] \\
&= E[e^{\langle \bar{a}+2a,\cdot\rangle} - 2e^{\langle 2a+\bar{a}+\bar{b},\cdot\rangle} + e^{\langle 2a+2\bar{b},\cdot\rangle} - 2e^{\langle a+b+2\bar{a},\cdot\rangle} + 4e^{\langle a+b+\bar{a}+\bar{b},\cdot\rangle} \\
&\qquad - 2e^{\langle a+b+2\bar{b},\cdot\rangle} + e^{\langle 2b+2\bar{a},\cdot\rangle} - 2e^{\langle 2b+\bar{a}+\bar{b},\cdot\rangle} + e^{\langle 2b+2\bar{b},\cdot\rangle}]
\end{aligned}$$

und mit $E[e^{\langle a,\cdot\rangle}] = e^{\frac{1}{2}Q[a]}$ sieht man sofort die Stetigkeit. Außerdem ist auch

$$t \mapsto e^{i\omega(T-t)}a + \int_\tau e^{i\omega(\tau-t)} \in h_{\mathbb{C}}$$

stetig wegen der Konvergenz

$$e^{i|k|(T-s)}\hat{a}(k) \underset{s\to t}{\longrightarrow} e^{i|k|(T-t)}\hat{a}(k) \qquad \text{punktweise}$$

und damit, weil $|\hat{a}|$ eine Majorante ist, auch in $L^2(\frac{dk}{|k|})$. Auch für den zweiten Summanden sieht man die punktweise Konvergenz und hat

$$|\int_s^T d\tau\, e^{i|k|(\tau-s)}\widehat{J_\tau}| \le \int_{t-\epsilon}^T d\tau\, |\widehat{J_\tau}| \in L^2\left(\frac{dk}{|k|}\right)$$

wegen $\int_{t-\epsilon}^T d\tau\, Q[J_\tau] < \infty$. $\square$

Lemma 2:
Seien a und Φ wie in Lemma 1. Dann ist $t \mapsto \delta\omega D\overline{U_{t,T}\bar{\Phi}} \in L^2_{\mathbb{C}}(V,P)$ stetig.

Beweis:
Mit $b, \omega b \in h_{\mathbb{C}}$ gilt

$$\delta\omega D e^{\langle b,\cdot\rangle} = \delta\omega b e^{\langle b,\cdot\rangle} = (\langle \omega b,\cdot\rangle - Q(b\omega b))e^{\langle b,\cdot\rangle}.$$

Es ist nun außerdem

$$\begin{aligned}
&\overline{U_{t,T}\bar{\Phi}} \\
&= \exp\Big[i\overline{\chi_t^T} + 2Q(a, e^{-i\omega(T-t)}\int_\tau s(\tau - t)) + iQ(a, e^{-i\omega(T-t)}s(T-t)a) \\
&\qquad + \langle e^{-i\omega(T-t)}a - i\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}, \cdot\rangle\Big]
\end{aligned}$$

und damit sehen wir

$$\delta\omega D\overline{U_{t,T}\bar{\Phi}} = (\langle\omega\lambda_t, \cdot\rangle - Q[\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_t])\overline{U_{t,T}\bar{\Phi}} \quad \text{mit} \quad \lambda_t = e^{-i\omega(T-t)}a - i\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}.$$

Mit Lemma 1 bleibt noch zu zeigen, dass

$$t \mapsto \langle\omega\lambda_t, \cdot\rangle - Q[\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_t] \in L^4(V, P)$$

stetig ist. Tatsächlich ist der zweite Summand stetig, weil $t \mapsto \lambda_t \in h_{\mathbb{C}}$ stetig ist, was man ebenso sieht wie in Lemma 1, und weil aus dem gleichen Grund auch $t \mapsto \omega\lambda_t \in h_{\mathbb{C}}$ stetig ist, wobei wir die neuen Voraussetzungen an J benutzt haben. Dies zeigt dann auch die Stetigkeit des ersten Summanden. □

Lemma 3:
Sei $b \in h$ mit $\omega b \in h$ und $\Phi \in L^2(V, P)$. Setze $\Psi_t := U_{t,T}e^{\langle b, \cdot\rangle}$. Dann gilt

$$iE[\Phi(\Psi_T - \Psi_t)] = \int_t^T d\tau\, E[Q(\Phi, \delta\omega D\Psi_\tau) + \Phi\langle J_\tau, \cdot\rangle\Psi_\tau]$$

für alle t.

Beweis:
Mit der Berechnung und damit der Existenz von $\delta\omega D\overline{U_{t,T}\bar{\Phi}}$ aus Lemma 2 und nach dem Lemma aus Abschnitt 7.3 ist die Gleichung für $\Phi = e^{\langle a, \cdot\rangle}$ mit $a, \omega a \in h$ klar. Für alle anderen Φ folgt die Gleichung nun durch Approximation in $L^2(V, P)$.

Bemerkung:
Beachte, dass auch $\tau \mapsto \langle J_\tau, \cdot\rangle \in L^4(V, P)$ stetig ist, was man durch die Rechnung

$$E[|\langle b, \cdot\rangle|^4] = \partial_t^2\partial_s^2|_{t=s=0}E[e^{t\langle b, \cdot\rangle + s\langle\bar{b}, \cdot\rangle}] = \partial_t^2\partial_s^2|_{t=s=0}e^{\frac{1}{2}Q[tb+s\bar{b}]} \le \text{const}\, Q(b, \bar{b})^2$$

sieht. Dabei haben wir die Stetigkeit von J benutzt.

Satz:
Erfülle J die oben genannten Voraussetzungen. Sei $\tilde{\Psi}_T \in L^2(V, P)$ eine Anfangsbedingung und $U_{t,T}$ die im Abschnitt 7.2 konstruierte unitäre Dynamik. Setze dann $\tilde{\Psi}_t := U_{t,T}\tilde{\Psi}_T$. Dann gilt:

1. $\tilde{\Psi}_t$ ist eine schwache Lösung der Photonenfeldgleichung.

2. Sei Ψ_t eine weitere schwache Lösung mit $\Psi_T = \tilde{\Psi}_T$. Dann ist $\Psi_t = \tilde{\Psi}_t$ für alle t.

Beweis:
1. ist mit dem Lemma in Abschnitt 7.3 klar. Beweisen wir also 2.: Setze dazu $\Phi_t := U_{T,t}\Psi_t$. Seien außerdem $a, \omega a \in h$ und $\Phi = e^{\langle a,\cdot\rangle}$. Wir betrachten $E[\Phi\,\Phi_t]$ und wollen zeigen, dass dies konstant in t ist. Daraus folgt dann offenbar, weil $(e^{\langle a,\cdot\rangle} : a, \omega a \in h)$ total in $L^2(V,P)$ ist, dass $\Phi_t = \Phi_T = \tilde{\Psi}_T$, was zu zeigen ist. Es gilt nun mit Lemma 3 und weil Ψ_t eine schwache Lösung ist und mit der Formel für $U_{t,T}\bar{\Phi}$, sowie den neuen Voraussetzungen an J, dass für alle r, t gilt

$$\begin{aligned}
&iE[\Phi(\Phi_r - \Phi_t)] \\
&= \overline{-iE[(U_{r,T}\bar{\Phi} - U_{t,T}\bar{\Phi})\bar{\Psi}_r]} + iE[\overline{U_{t,T}\bar{\Phi}}(\Psi_r - \Psi_t)] \\
&= \int_t^r d\tau E[-\Psi_r\delta\omega D\overline{U_{\tau,T}\bar{\Phi}} - \Psi_r\langle J_\tau,\cdot\rangle\overline{U_{\tau,T}\bar{\Phi}} + \Psi_\tau\delta\omega D\overline{U_{t,T}\bar{\Phi}} + \Psi_\tau\langle J_\tau,\cdot\rangle\overline{U_{t,T}\bar{\Phi}}]
\end{aligned}$$

Nun wollen wir differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{r-t}E[\Phi(\Phi_r - \Phi_t)] \\
&= -E[\Psi_r \underbrace{\frac{1}{r-t}\int_t^r d\tau\, \delta\omega D\overline{U_{\tau,T}\bar{\Phi}}}_{\xrightarrow[t\to r]{}\delta\omega D\overline{U_{r,T}\bar{\Phi}}}] - E[\Psi_r \underbrace{\frac{1}{r-t}\int_t^r d\tau\, \langle J_\tau,\cdot\rangle\overline{U_{\tau,T}\bar{\Phi}}}_{\to\langle J_r,\cdot\rangle\overline{U_{r,T}\bar{\Phi}}}] \\
&\quad + E[\underbrace{\frac{1}{r-t}\int_t^r d\tau\, \Psi_\tau}_{\to\Psi_r} \underbrace{\delta\omega D\overline{U_{t,T}\bar{\Phi}}}_{\to\delta\omega D\overline{U_{r,T}\bar{\Phi}}}] + E[\underbrace{\frac{1}{r-t}\int_t^r d\tau\, \Psi_\tau\langle J_\tau,\cdot\rangle}_{\xrightarrow{L^{\frac{4}{3}}(P)}\Psi_r\langle J_r,\cdot\rangle} \underbrace{\overline{U_{t,T}\bar{\Phi}}}_{\xrightarrow{L^4(P)}\overline{U_{r,T}\bar{\Phi}}}]
\end{aligned}$$

Falls nicht anders markiert, ist hier Konvergenz in $L^2(V,P)$ gemeint. Die erste Konvergenz gilt dabei wegen Lemma 2, die zweite wegen Lemma 1 und der Bemerkung zu Lemma 3, die dritte weil Ψ als schwache Lösung stetig ist, die vierte nach Lemma 1, die fünfte wegen der Bemerkung zu Lemma 3, also der Stetigkeit von $\tau \mapsto \langle J_\tau,\cdot\rangle$ in $L^4(V,P)$ und die letzte wieder mit Lemma 2. Dies zeigt, dass $E[\Phi\,\Phi_t]$ in t differenzierbar ist mit verschwindender Ableitung. □

7.5 Geschlossene Lösungsformel

In diesem Abschnitt wollen wir eine konkrete Formel herleiten, mit der sich die zeitliche Entwicklung einer beliebigen Anfangsbedingung in $L^2(V,P)$ zu jedem Zeitpunkt angeben lässt. Wir wechseln dazu ins Wechselwirkungsbild, d.h. wir invertieren den Teil der vollen Dynamik, der von der freien Bewegung herrührt.

Wir führen nun zunächst eine formale Rechnung durch, um eine Motivation für die alternative Darstellung unserer unitären Dynamik $U_{t,T}$ zu erhalten. Sei dazu Ψ_t Lösung der vollen Photonenfeldgleichung. Dann setzen wir $\Psi_t^I := U^0_{T,t}\Psi_t$. Es sollte dann bekanntermaßen Ψ_t^I die Gleichung

$$i\partial_t \Psi_t^I = U^0_{T,t}\langle J_t, \cdot\rangle U^0_{t,T}\Psi_t^I = V_t^I \Psi_t^I$$

erfüllen. Berechnen wir nun also V_t^I.

$$\begin{aligned}
&U_{T,t}\langle J_t,\cdot\rangle U_{t,T} e^{\langle a,\cdot\rangle}\\
&= U_{T,t}\langle J_t,\cdot\rangle \exp[-iQ(a, e^{i\omega(T-t)}s(T-t)a) + \langle e^{i\omega(T-t)}a,\cdot\rangle]\\
&= e^{-iQ(a,e^{i\omega(T-t)}s(T-t)a)}\partial_\alpha|_{\alpha=0} U_{T,t}\exp[\langle e^{i\omega(T-t)}a + \alpha J_t,\cdot\rangle]\\
&= e^{-iQ(a,e^{i\omega(T-t)}s(T-t)a)}\partial_\alpha|_{\alpha=0}\exp\Big[\langle e^{-i\omega(T-t)}\left(e^{i\omega(T-t)}a + \alpha J_t\right),\cdot\rangle\\
&\qquad + iQ(e^{i\omega(T-t)}a + \alpha J_t, e^{-i\omega(T-t)}s(T-t)\left(e^{i\omega(T-t)}a + \alpha J_t\right))\Big]\\
&= \Big(2iQ(e^{i\omega(T-t)}a, e^{-i\omega(T-t)}s(T-t)J_t) + \langle e^{-i\omega(T-t)}J_t,\cdot\rangle\Big)\\
&\qquad \exp\Big[-iQ(a,e^{i\omega(T-t)}s(T-t)a) + iQ(a,e^{i\omega(T-t)}s(T-t)a) + \langle a,\cdot\rangle\Big]\\
&= 2iQ(s(T-t)J_t, De^{\langle a,\cdot\rangle}) + \langle e^{-i\omega(T-t)}J_t,\cdot\rangle e^{\langle a,\cdot\rangle}
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit die Gleichung

$$i\partial_t\Psi_t^I = 2iQ(s(T-t)J_t, D\Psi_t^I) + \langle e^{-i\omega(T-t)}J_t,\cdot\rangle\Psi_t^I$$

für die Wellenfunktion im Wechselwirkungsbild. Diese Gleichung lässt sich elementar lösen, z.B. indem man die Formeln aus Abschnitt 5.1 benutzt.

$$\Psi_t^I = \Phi(\cdot - \frac{1}{\omega}\int_\tau s(T-\tau))\,\Omega_t^I$$

Dabei verwenden wir die abkürzende Notation

$$\Omega_t^I := \exp\left[i\langle\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)},\cdot\rangle - 2i\int_t^T d\tau\, Q(s(T-\tau)J_\tau, \int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{-i\omega(T-\sigma)})\right].$$

Für $\Phi \in L^2(V,P)$ setzen wir nun also

$$\Psi_t := U^0_{t,T}\left(\Phi(\cdot - \frac{1}{\omega}\int_\tau s(T-\tau))\,\Omega_t^I\right)$$

und zeigen, dass dies mit $U_{t,T}$ auf W übereinstimmt. Für $\Phi = e^{\langle a,\cdot\rangle}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}
&\Psi_t \\
&= U^0_{t,T}\Bigg(\exp\Bigg[\langle a,\cdot\rangle - 2Q(a,\int_\tau s(T-\tau)) + \langle i\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)},\cdot\rangle \\
&\qquad - 2i\int_t^T d\tau\, Q(s(T-\tau)J_\tau, \int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{-i\omega(T-\sigma)})\Bigg]\Bigg) \\
&= \exp\Bigg[-2Q(a,\int_\tau s(T-\tau)) - 2i\int_t^T d\tau\, Q(s(T-\tau)J_\tau, \int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{-i\omega(T-\sigma)}) \\
&\qquad - iQ(a+i\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}, e^{i\omega(T-t)}s(T-t)\left(a+i\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}\right)) \\
&\qquad + \langle e^{i\omega(T-t)}(a+i\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}),\cdot\rangle\Bigg] \\
&= \exp\Bigg[\langle e^{i\omega(T-t)}a + i\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)},\cdot\rangle - iQ(a, e^{i\omega(T-t)}s(T-t)a) \\
&\qquad + 2Q(a,\underbrace{e^{i\omega(T-t)}s(T-t)\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)} - \int_\tau s(T-\tau)}_{=e^{i\omega(T-t)}\int_\tau s(\tau-t)}) + \frac{1}{2}Q[\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)}] \\
&\qquad \underbrace{-2i\int_t^T d\tau\, Q(s(T-\tau)J_\tau, \int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{-i\omega(T-\sigma)}) - \frac{1}{2}Q[\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}]}_{=:I}\Bigg].
\end{aligned}$$

Dabei ist der Term (I) absolutstetig und hat die Ableitung

$$\begin{aligned}
&- 2iQ(s(T-t)J_t, \int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}) - Q(\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}, e^{-i\omega(T-t)}J_t) \\
&= -Q(J_t, \int_\tau e^{i\omega(\tau-t)}) \\
&= i\partial_t(\chi_t^T + \frac{i}{2}Q[\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)}]).
\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. Und somit haben wir bewiesen:

Satz:

$$\begin{aligned}
U^I_{t,T} &: L^2(V,P)\to L^2(V,P), \Phi \mapsto \Phi(\cdot - \frac{1}{\omega}\int_\tau s(T-\tau)) \qquad (26)\\
&\exp\Bigg[i\langle\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)},\cdot\rangle - 2i\int_t^T d\tau\, Q(s(T-\tau)J_\tau, \int_{\sigma\in[\tau,T]} e^{-i\omega(T-\sigma)})\Bigg]
\end{aligned}$$

ist unitär und $U_{t,T} = U^0_{t,T}\, U^I_{t,T}$.

7.6 Regularitätseigenschaften der Dynamik

Wir wollen nun ein wenig untersuchen, inwiefern reguläre Startwerte unter der Zeitentwicklung regulär bleiben. Wir führen dafür zunächst die sesquilineare Version von Q ein, $\bar{Q}(a,b) := Q(\bar{a},b)$, und wollen dann untersuchen, ob $U_{t,T}$ bezüglich Halbnormen der Form $\bar{Q}[\omega^k D\cdot\,]$ stetig ist. Wir definieren zunächst den Raum

$$X := \{f(\langle a_1,\cdot\rangle,\dots,\langle a_N,\cdot\rangle) : N\in\mathbb{N}, f\in C_p^\infty(\mathbb{R}^N), a_1,\dots,a_N\in\mathcal{S}\}.$$

Dann lässt sich ebenso wie man die Abschließbarkeit von D auf $L^2(P)$ zeigt[19] auch beweisen, dass

$$\omega^k D : X \to L^2(P)$$

abschließbar ist. Den Definitionsbereich dieses Abschlusses nennen wir $\mathbb{D}_k^{1,2}$ und dies ist ein Hilbertraum mit der Norm

$$\|\cdot\|^2_{\mathbb{D}_k^{1,2}} := \|\cdot\|^2_{L^2(P)} + \left\|\bar{Q}[\omega^k D\cdot\,]\right\|^2_{L^2(P)}.$$

Nun beweisen wir ein kleines

Lemma 1:
$\operatorname{span}(e^{\langle b,\cdot\rangle} : b\in\mathcal{S}) \subseteq (\mathbb{D}_k^{1,2}, \|\cdot\|_{\mathbb{D}_k^{1,2}})$ liegt dicht.

Beweis:
Wir beginnen mit dem Fall $k=0$. Sei $\Psi\in\mathbb{D}_0^{1,2}$, so dass für alle $b\in\mathcal{S}$

$$\begin{aligned}0 &= \langle \Psi, e^{\langle b,\cdot\rangle}\rangle_{\mathbb{D}_0^{1,2}}\\ &= E[Q(D\Psi, De^{\langle b,\cdot\rangle})] + E[\Psi e^{\langle b,\cdot\rangle}]\\ &= E[Q(D\Psi,b)e^{\langle b,\cdot\rangle}] + E[\Psi e^{\langle b,\cdot\rangle}]\\ &= E[\langle b,\cdot\rangle\Psi e^{\langle b,\cdot\rangle}] - E[Q[b]\Psi e^{\langle b,\cdot\rangle}] + E[\Psi e^{\langle b,\cdot\rangle}] := f(b).\end{aligned}$$

Wir betrachten nun $f(t\,b)$ Ordnung für Ordnung in t und erhalten

$$\begin{aligned}\text{0. Ordnung:}\quad & E[\Psi]=0\\ \text{1. Ordnung:}\quad & E[\langle b,\cdot\rangle\Psi]=0\\ \text{n-te Ordnung:}\quad & (n+1)E[\langle b,\cdot\rangle^n\Psi] = n(n-1)Q[b]E[\langle b,\cdot\rangle^{n-2}\Psi]\end{aligned}$$

Damit folgt sofort durch Induktion

$$E[\langle b,\cdot\rangle^n\Psi]=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}_0,$$

also auch $\Psi=0$.

Nun wollen wir den allgemeinen Fall für beliebiges $k\in\mathbb{N}_0$ auf den Spezialfall $k=0$ zurückführen. In einem ersten Schritt zeigen wir dafür, dass

$$X' := \{p(\langle a_1,\cdot\rangle,\dots,\langle a_N,\cdot\rangle) : N\in\mathbb{N},\, p \text{ Polynom},\, \hat{a}_1,\dots,\hat{a}_N\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\{0\};\mathbb{R}^3)\}.$$

[19] [5]

in $\mathbb{D}_k^{1,2}$ dicht liegt. Zunächst wollen wir also in der Definition von X den Raum $C_p^\infty(\mathbb{R}^N)$ durch den Raum der Polynome ersetzen und immer noch einen dichten Teilraum von $\mathbb{D}_k^{1,2}$ erhalten. Sind nun $a_1, \dots, a_N \in \mathcal{S}$ linear unabhängig und

$$\rho := P \circ (\langle a_1, \cdot \rangle, \dots, \langle a_N, \cdot \rangle)^{-1}$$

ein zentriertes Gaußsches Maß, dann wissen wir aus dem Fall $k = 0$ von oben, dass $\operatorname{span}(e^{c \cdot x} : c \in \mathbb{R}^N)$ dicht im Abschluss von $C_p^\infty(\mathbb{R}^N)$ bezüglich der N-dimensionalen $\mathbb{D}_0^{1,2}$-Norm liegt, welche gerade die Form

$$\|f\|_{L^2(\rho)}^2 + \|\nabla f \cdot \nabla f\|_{L^2(\rho)}^2$$

hat. Da aber

$$e^{c \cdot x} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(c \cdot x)^k}{k!}$$

in eben dieser Norm konvergiert, erhalten wir, dass es für $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^N)$ eine Folge von Polynomen p_n gibt mit $p_n \to f$ und $\partial_j p_n \to \partial_j f$ in $L^2(\rho)$ für alle $j = 1, \dots, N$. Da nun die $\mathbb{D}_k^{1,2}$-Norm (unendlich-dimensional) für $\Psi = f(\langle a_1, \cdot \rangle, \dots, \langle a_N, \cdot \rangle)$ die Form

$$\|\Psi\|_{\mathbb{D}_k^{1,2}}^2 = \|f\|_{L^2(\rho)}^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \bar{Q}(\omega^k a_j, \omega^k a_l) \langle \partial_j f, \partial_l f \rangle_{L^2(\rho)}$$

hat, lässt sich Ψ durch $p_n(\langle a_1, \cdot \rangle, \dots, \langle a_N, \cdot \rangle)$ approximieren.

Nun wollen wir zeigen, dass es reicht $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{R}^3)$ zu fordern. Mit der Form der $\mathbb{D}_k^{1,2}$-Norm von oben und weil es für $a_1, \dots, a_N \in \mathcal{S}$ Folgen $\hat{a}_j^n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{R}^3)$ mit $a_j^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a_j$ in allen $Q[\omega^k \cdot]$-Normen gibt, sehen wir dies sofort, weil für ein Polynom p auch

$$p(\langle a_1^n, \cdot \rangle, \dots, \langle a_N^n, \cdot \rangle) \overset{L^2(P)}{\longrightarrow} p(\langle a_1, \cdot \rangle, \dots, \langle a_N, \cdot \rangle)$$

folgt.

Es reicht mit dieser Erkenntnis nun folgende Aussage zu zeigen. Sind $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_N \in C_0^\infty(B_R \setminus \overline{B}_\epsilon; \mathbb{R}^3)$, p ein Polynom, dann lässt sich $\Psi = p(\langle a_1, \cdot \rangle, \dots, \langle a_N, \cdot \rangle)$ in $\mathbb{D}_k^{1,2}$ durch Funktionen in $\operatorname{span}(e^{\langle b, \cdot \rangle} : b \in \mathcal{S})$ approximieren. Wir setzen nun, um dies zu zeigen,

$$g := \{a \in h : \hat{a}|_{B_R^c \cup \overline{B}_\epsilon} = 0\}.$$

Dann ist (g, Q) ein Hilbertraum und $\mathcal{G} := (\langle b, \cdot \rangle : b \in g)$ eine Gaußsche Familie bezüglich P mit Kovarianz Q. Auch über $L^2(V, \sigma(\mathcal{G}), P)$ haben wir natürlich eine Mallivin-Ableitung, die mit der Restriktion von D übereinstimmt und der Operator ω ist auf g stetig. Wir können also auch Räume $\mathbb{D}_k^{1,2}(V, \sigma(\mathcal{G}), P)$ einführen. Aus dem Fall $k = 0$ wissen wir, dass

$$\operatorname{span}(e^{\langle b, \cdot \rangle} : b \in g) \subseteq \mathbb{D}_0^{1,2}(V, \sigma(\mathcal{G}), P)$$

dicht liegt. Da aber ω auf g beschränkt ist, sind die $\mathbb{D}_k^{1,2}(V, \sigma(\mathcal{G}), P)$-Normen alle äquivalent. Wir können somit Ψ in $\mathbb{D}_k^{1,2}$ durch Linearkombinationen von $(e^{\langle b,\cdot\rangle} : b \in g)$ approximieren. Offenbar folgt nun aus $g \ni b_n \stackrel{Q}{\to} b \in g$ auch

$$e^{\langle b_n,\cdot\rangle} \xrightarrow{\mathbb{D}_k^{1,2}} e^{\langle b,\cdot\rangle},$$

also liegt

$$\operatorname{span}(e^{\langle b,\cdot\rangle} : \hat{b} \in C_0^\infty(B_R \setminus \overline{B}_\epsilon; \mathbb{R}^3)) \subseteq \operatorname{span}(e^{\langle b,\cdot\rangle} : \hat{b} \in g)$$

dicht. □

Nun betrachten wir zunächst die freie Dynamik.

Lemma 2:
$U_{t,T}^0 : \mathbb{D}_k^{1,2} \to \mathbb{D}_k^{1,2}$ ist eine Isometrie.

Beweis:
Wir verwenden die Darstellung (21) der Dynamik mit Startwert $\Psi_T^b = e^{\langle b,\cdot\rangle}$.

$$\begin{aligned} E[\bar{Q}(\omega^k D\Psi_t^a, \omega^k D\Psi_t^b)] &= E[\bar{Q}(\omega^k e^{i\omega(T-t)} a, \omega^k e^{i\omega(T-t)} b)\Psi_t^a\, \Psi_t^b] \\ &= Q(\omega^k \bar{a}, \omega^k b) E[\Psi_T^a\, \Psi_T^b] = E[\bar{Q}(\omega^k \Psi_T^a, \omega^k \Psi_T^b)] \end{aligned}$$

Mit der Dichtheit aus Lemma 1 folgt die Behauptung. □

Nun verwenden wir die geschlossene Lösungsformel (26) aus Abschnitt 7.5, um die Stetigkeit der vollen Dynamik zu erhalten.

Satz:
Der Strom J erfülle die zusätzliche Voraussetzung, dass

$$\omega^k J_\tau \in h \qquad \text{und} \qquad \tau \mapsto Q[\omega^k J_\tau] \in L^1(d\tau).$$

Dann ist $U_{t,T} : \mathbb{D}_k^{1,2} \to \mathbb{D}_k^{1,2}$ stetig.

Beweis:
Wir müssen nur noch die Stetigkeit von $U_{t,T}^I$ zeigen. Wir bezeichnen mit

$$\Omega_t^I := U_{t,T}^I 1$$

die Zeitentwicklung des Vakuums im Wechselwirkungsbild. Es gilt dann für $\Phi \in \mathbb{D}_k^{1,2}$ mit $A_t := \frac{1}{\omega}\int_\tau s(T-\tau)$:

$$\begin{aligned}
&E\left[\bar{Q}\left[\omega^k D\Phi \circ T_{A_t}^{-1}\Omega_t^I\right]\right] \\
&= E\left[\bar{Q}\left[\omega^k (D\Phi)\circ T_{A_t}^{-1}\Omega_t^I + i\omega^k \int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}\,\Phi\circ T_{A_t}^{-1}\Omega_t^I\right]\right] \\
&= E\Bigg[\Bigg(\bar{Q}\left[\omega^k D\Phi\right] + 2\Re\left(\bar{Q}\left(\omega^k D\Phi, \omega^k i \int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}\,\Phi\right)\right) \\
&\qquad + \bar{Q}\left[\omega^k i \int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}\,\Phi\right]\Bigg)\circ T_{A_t}^{-1}|\Omega_t^I|^2\Bigg] \\
&\underset{(\star)}{=} E[\bar{Q}[\omega^k D\Phi]] + 2\Re E[\bar{Q}(\omega^k D\Phi, \omega^k i \int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)})\,\Phi] \\
&\qquad + \bar{Q}[\omega^k \int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}]E[|\Phi|^2] \\
&\leq 2\left(E[\bar{Q}[D\Phi]] + \bar{Q}[\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}]E[|\Phi|^2]\right)
\end{aligned}$$

In $(\star)$ haben wir bereits das Resultat aus dem Satz des folgenden Kapitels, also die Translationsformel des Gaußschen Maßes unter Translationen, benutzt. □

8 Transformationen des Wahrscheinlichkeitsmaßes P

8.1 Translationen

Wir wollen das Verhalten eines Gaußschen Maßes über $\mathcal{S}'$ unter Translationen untersuchen. Dazu benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen.

Lemma 1:

- $H^{m,n+1} \ni a \mapsto \sqrt{1+|x|^2}\, a \in H^{m,n}$
- $H^{m+1,n} \ni a \mapsto \sqrt{1-\triangle}\, a \in H^{m,n}$

sind wohldefinierte Banachraumisomorphismen.

Beweis:
Zunächst stellen wir fest, dass die $g_{m,n}$-Norm äquivalent ist zu

$$\tilde{g}_{m,n}[a] := \sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|\leq n} \|x^\beta \partial^\alpha a\|^2.$$

Dies sieht man sofort mit der Fouriertransformation und der Abschätzung

$$\|a+b\|^2 \leq 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Insbesondere reicht es den Fall $\sqrt{1+|x|^2} : H^{m,n+1} \to H^{m,n}$ anzuschauen. Unter Fouriertransformation lässt sich der Fall $\sqrt{1-\triangle}$ nämlich auf diesen zurückführen. Wir zeigen nun die Beschränktheit dieser Transformation auf Schwartzfunktionen und die Beschränktheit der Inversen $(1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}}$. Im Folgenden bezeichnen α, β, γ, δ, ϵ, σ Multiindices und c_α, d_α, β, γ, ρ_k, τ_k Konstanten. Wir sehen schnell durch Induktion, dass

$$\partial^\alpha f\left(|x|^2\right) = \sum_{0 \leq 2\beta-\alpha \leq \alpha} c_\beta\, f^{(|\beta|)}\left(|x|^2\right) x^{2\beta-\alpha}$$

und außerdem gilt

$$\partial_\xi^k (1+\xi)^{-\frac{1}{2}} = \rho_k (1+\xi)^{-\frac{2k+1}{2}} \tag{27}$$

$$\partial_\xi^k (1+\xi)^{\frac{1}{2}} = \tau_k (1+\xi)^{-\frac{2k-1}{2}} \tag{28}$$

Schätzen wir nun also $g_{m,n}[\sqrt{1+|\cdot|^2}\, a]$ ab. Seien dazu $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq n$.

$$\begin{aligned}
&\|k^\alpha \partial^\beta \sqrt{1-\triangle}\, \hat{a}\|^2 \\
&= \|\partial^\alpha x^\beta \sqrt{1+|x|^2}\, a\|^2 \\
&= \left\| \sum_{\gamma+\delta+\epsilon=\alpha, \gamma \leq \beta} d_{\gamma,\delta,\epsilon}\, x^{\beta-\gamma} \left(\partial^\delta \sqrt{1+|x|^2}\right) \partial^\epsilon a \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{\gamma+\delta+\epsilon=\alpha, \gamma \leq \beta} \sum_{0 \leq 2\sigma-\delta \leq \delta} d_{\gamma,\delta,\epsilon}\, c_\sigma\, \tau_{|\sigma|}\, x^{2\sigma+\beta-\gamma-\delta} (1+|x|^2)^{-\frac{2|\sigma|-1}{2}} \partial^\epsilon a \right\|^2 \\
&\leq \text{const } \max\Big\{ \left\| x^{2\sigma+\beta-\gamma-\delta} (1+|x|^2)^{-\frac{2|\sigma|-1}{2}} \partial^\epsilon a \right\|^2 : \\
&\qquad \gamma \leq \beta, \gamma+\delta+\epsilon=\alpha, 0 \leq 2\sigma-\delta \leq \delta \Big\} \\
&\leq \text{const } \max\Big\{ \int |x|^{4|\sigma|+2|\beta|-2|\alpha|+2|\epsilon|} (1+|x|^2)^{-2|\sigma|+1} |\partial^\epsilon a|^2\, dx : \\
&\qquad \gamma \leq \beta, \gamma+\delta+\epsilon=\alpha, 0 \leq 2\sigma-\delta \leq \delta \Big\} \\
&\underset{(\star)}{\leq} \text{const} \max_{|\epsilon| \leq m} \left\{ \int (1+|x|^2)(1+|x|^{2n}) |\partial^\epsilon a|^2\, dx \right\} \\
&\leq \text{const}\, \tilde{g}_{m,n+1}[a]
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in $(\star)$ benutzt, dass

$$\begin{aligned}
&|x|^{4|\sigma|+2|\beta|-2|\alpha|+2|\epsilon|}(1+|x|^2)^{-2|\sigma|} \\
&\leq \mathbb{1}_{|x|\leq 1} + |x|^{2|\beta|-2|\alpha|+2|\epsilon|}\mathbb{1}_{|x|>1} \\
&\leq 1+|x|^{2|\beta|} \\
&\leq 2(1+|x|^{2n})
\end{aligned}$$

für $|\epsilon| \leq |\alpha|$. Nun zeigen wir noch, dass auch $(1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}} : H^{m,n} \to H^{m,n+1}$ beschränkt ist auf Schwartzfunktionen und damit wohldefiniert. Sei dazu $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq n+1$. $(\star\star)$ ist ein zu obiger Rechnung analoger Schritt unter Benutzung von (27) statt (28).

$$\begin{aligned}
&\|k^\alpha \partial^\beta (1-\triangle)^{-\frac{1}{2}}\,\hat{a}\|^2 \\
&= \|\partial^\alpha x^\beta (1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}}\,a\|^2 \\
&\underset{(\star\star)}{\leq} \text{const} \max_{|\epsilon|\leq m} \int (1+|x|^2)^{-1}(1+|x|^{2(n+1)})|\partial^\epsilon a|^2\,dx \\
&\leq \text{const} \max_{|\epsilon|\leq m} \int (1+|x|^2)^{n}|\partial^\epsilon a|^2\,dx \\
&\leq \text{const}\,\tilde{g}_{m,n}[a]
\end{aligned}$$

□

Lemma 2:
Ist Q eine auf $H^{m,n}$ stetige nichtnegative quadratische Form, so stammt sie auf $H^{m+2,n+2}$ von einem Spurklasseoperator.

Beweis:
Sei $A := (1+|x|^2)(1-\triangle)$. Dann stammt nach Lemma 1 Q genau dann auf $H^{m+2,n+2}$ von einem Spurklasseoperator, wenn für eine Orthonormalbasis $(f_k)_{k=1}^\infty$ auf $H^{m,n}$ gilt, dass

$$\infty > \sum_k^\infty Q(A^{-1}f_k, A^{-1}f_k) = \sum_k^\infty g_{m,n}(A^{-1}f_k, qA^{-1}f_k),$$

wobei q der zu Q gehörige beschränkte Operator auf $H^{m,n}$ ist. Dies ist insbesondere der Fall, wenn A^{-1} auf $H^{m,n}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Da nach Lemma 1 die Abbildung

$$(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}}(1-\triangle)^{\frac{m}{2}} : L^2 \to H^{m,n}$$

ein Banachraumisomorphismus ist, können wir dies nachweisen, indem wir

$$\sum_{k=1}^\infty \|Be_k\|^2 < \infty$$

für eine L^2-Orthonormalbasis $(e_k)_{k=1}^\infty$ und

$$B = (1+|x|^2)^{\frac{n}{2}}(1-\triangle)^{\frac{m}{2}} A^{-1}(1+|x|^2)^{-\frac{n}{2}}(1-\triangle)^{-\frac{m}{2}}$$

zeigen. Wieder nach Lemma 1 ist jedoch $B : L^2 \to H^{2,2}$ ein Banachraumisomorphismus und somit haben wir

$$\text{const}_1 C_{2,2}^{-1} \leq B^* B \leq \text{const}_2 C_{2,2}^{-1},$$

d.h. es reicht $\text{Tr}[C_{2,2}^{-1}] < \infty$ zu beweisen. Da nun

$$C_{2,2}^{-1} \leq \text{const}(1-\triangle)^{-1}(1-|x|^2)^{-2}(1-\triangle)^{-1}$$

und

$$\kappa(p,q) = (1+|p|^2)\int \frac{dx}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{e^{ix\cdot(p-q)}}{(1+|x|^2)^2}(1+|q|^2)^{-1}$$

der stetige Integralkern dieses nichtnegativen Operators im Fourierraum ist, erhalten wir unser Ergebnis wegen

$$\int dp\,\kappa(p,p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{dp}{(1+|p|^2)^2} < \infty.$$

□

Wir wollen nun Gaußsche Maße auf $\mathcal{S}'$ verschieben und die Frage beantworten, wann zwei solche Verschiebungen zueinander äquivalente Maße sind. Seien dazu $A, B \in \mathcal{S}'$ und

$$T_A : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}', C \mapsto C + A.$$

Sei P ein Maß auf $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'))$, dann sind für $\rho \in L^1(P \circ T_A^{-1})$ offenbar die Gleichungen

$$dP \circ T_B^{-1} = \rho\, dP \circ T_A^{-1}$$

und

$$dP = \rho \circ T_B\, dP \circ T_A^{-1} \circ T_B = \rho \circ T_B\, dP \circ T_{A-B}^{-1}$$

äquivalent, also wird unsere Frage erschöpfend beantwortet durch folgenden an Girsanovs Theorem[20] erinnernden

Satz:
Sei Q eine auf $H^{m,n}$ stetige positiv definite quadratische Form und P das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'))$ mit Kovarianz Q. Sei weier $A \in \mathcal{S}'$. Dann gibt es nach Lemma 2 und weil $\mathcal{S}' = \bigcup_{r,s=1}^\infty H^{-s,-r}$ ist natürliche Zahlen $\tilde{m} \geq m+2$, $\tilde{n} \geq n+2$, so dass $Q = g_{\tilde{m},\tilde{n}}(\cdot, q\cdot)$ gilt. Dabei ist

$$q = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k g_{\tilde{m},\tilde{n}}(f_k,\cdot) f_k \quad \text{mit} \quad \lambda_k > 0 \quad \text{und} \quad \sum_k \lambda_k < \infty$$

[20] [21]

ein Spurklasseoperator auf $H^{\tilde{m},\tilde{n}}$, wobei $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ eine $g_{\tilde{m},\tilde{n}}$-Orthonormalbasis ist. Zusätzlich können wir $A \in H^{-\tilde{m},-\tilde{n}}$ fordern. Nun sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $Q^{-1}[A] := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f_k, A\rangle^2}{\lambda_k} < \infty$
2. $dP \circ T_A^{-1} \ll dP$

In diesem Fall gilt:

$$dP \circ T_A^{-1} = e^{Q^{-1}(A,\cdot) - \frac{1}{2}Q^{-1}[A]} dP.$$

Gelten 1. und 2. nicht, so ist $P \perp P \circ T_A^{-1}$.

Bemerkung:
Q^{-1} lässt sich auf

$$X := \{B \in H^{-\tilde{m},-\tilde{n}} : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f_k, B\rangle^2}{\lambda_k} < \infty\}$$

als quadratische Form definieren. X ist der relative Abschluss von $\mathrm{span}\{g_{\tilde{m},\tilde{n}}(f_k,\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$ in $H^{-\tilde{m},-\tilde{n}}$ bezüglich Q^{-1}. Das kann man sehen, indem man

$$B = g_{\tilde{m},\tilde{n}}(b,\cdot) \in X \qquad \text{mit} \qquad b = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k f_k \in H^{\tilde{m},\tilde{n}}$$

durch die Folge

$$B_N := \sum_{k=1}^{N} \beta_k\, g_{\tilde{m},\tilde{n}}(f_k,\cdot) \xrightarrow[N\to\infty]{Q^{-1}} B$$

approximiert. Wir erhalten nun für $B \in \mathrm{span}\{g_{\tilde{m},\tilde{n}}(f_k,\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$:

$$E[Q^{-1}(B,\cdot)^2] = \sum_{k,l} \langle f_k, B\rangle\langle f_l, B\rangle E[\langle f_k,\cdot\rangle\langle f_l,\cdot\rangle]$$

$$= \sum_{k,l} \langle f_k, B\rangle\langle f_l, B\rangle Q(f_k, f_l) = \sum_k \frac{\langle f_k,\cdot\rangle^2}{\lambda_k} = Q^{-1}[B]$$

Folglich lässt sich

$$\mathrm{span}\{g_{\tilde{m},\tilde{n}}(f_k,\cdot) : k \in \mathbb{N}\} \ni B \mapsto Q^{-1}(B,\cdot) \in L^2(P)$$

isometrisch auf X fortsetzen und $Q^{-1}(A,\cdot)$ im Ausdruck für die Dichte ist genau in diesem Sinne zu verstehen. Wir beachten dabei, dass $\langle f_k,\cdot\rangle \in L^2(\mathcal{S}', P)$ wohldefiniert ist, da P nach dem Satz in Abschnitt 4.1 Träger in $H^{-\tilde{m},-\tilde{n}}$ hat.

Beweis:
1.) $\Rightarrow$ 2.): Zunächst folgt aus 1.) und der Bemerkung, dass

$$\exp(Q^{-1}(A,\cdot) - \frac{1}{2}Q^{-1}[A])$$

wohldefiniert ist. Seien nun

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, g_{\tilde{m},\tilde{n}}(f_k, \cdot) \in H^{-\tilde{m},-\tilde{n}} \qquad \text{und} \qquad A_N := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, g_{\tilde{m},\tilde{n}}(f_k, \cdot).$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
& E\left[\left|e^{Q^{-1}(A_N,\cdot)-\frac{1}{2}Q^{-1}[A_N]} - e^{Q^{-1}(A_M,\cdot)-\frac{1}{2}Q^{-1}[A_M]}\right|^2\right] \\
&= E\left[\exp\left[2\sum_{k=1}^{N} \frac{\langle f_k, A_N\rangle\langle f_k,\cdot\rangle}{\lambda_k} - Q^{-1}[A_N]\right]\right] \\
&\quad - 2E\bigg[\exp\bigg[\sum_{k=1}^{N} \frac{\langle f_k, A_N\rangle\langle f_k,\cdot\rangle}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{M} \frac{\langle f_k, A_M\rangle\langle f_k,\cdot\rangle}{\lambda_k} \\
&\qquad\quad - \frac{1}{2}Q^{-1}[A_N] - \frac{1}{2}Q^{-1}[A_M]\bigg]\bigg] \\
&\quad + E\left[\exp\left[2\sum_{k=1}^{M} \frac{\langle f_k, A_M\rangle\langle f_k,\cdot\rangle}{\lambda_k} - Q^{-1}[A_M]\right]\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{2}Q[2\sum_{k=1}^{N} \frac{\langle f_k,\cdot\rangle}{\lambda_k} f_k] - Q^{-1}[A_N]\right] \\
&\quad - 2\exp\left[\frac{1}{2}Q[\sum_{k=1}^{N} \frac{\langle f_k,\cdot\rangle}{\lambda_k} f_k + \sum_{k=1}^{M} \frac{\langle f_k,\cdot\rangle}{\lambda_k} f_k] - \frac{1}{2}Q^{-1}[A_N] - \frac{1}{2}Q^{-1}[A_M]\right] \\
&\quad + \exp\left[\frac{1}{2}Q[2\sum_{k=1}^{M} \frac{\langle f_k,\cdot\rangle}{\lambda_k} f_k] - Q^{-1}[A_M]\right] \\
&= e^{Q^{-1}[A_N]} - 2e^{Q^{-1}(A_N,A_M)} + e^{Q^{-1}[A_M]} \underset{N,M\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

also ist die Dichte in $L^2(P)$. Wir prüfen nun die Gleichheit beider Maße auf Mengen der Form

$$\bigcap_{k=1}^{N} \{\langle f_k, \cdot\rangle \in B_k\} \qquad \text{wobei} \qquad B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Die σ-Algebra $\mathcal{B}(H^{-\tilde{m},-\tilde{n}})$ wird nach Abschnitt 4.1 von diesen Mengen erzeugt. Und aus der Gleichheit folgt somit, dass die beiden Maße auf $H^{-\tilde{m},-\tilde{n}}$ und damit auch auf $\mathcal{S}'$ übereinstimmen.

$$
\begin{aligned}
&P \circ T_A^{-1}\left[\bigcap_{k=1}^{N}\{\langle f_k,\cdot\rangle \in B_k\}\right]\\
&= P\left[\bigcap_{k=1}^{N}\{\langle f_k,\cdot\rangle + \langle f_k, A\rangle \in B_k\}\right]\\
&= \bigotimes_{k=1}^{N} \mathcal{N}(\langle f_k, A\rangle, \lambda_k)[B_k]\\
&= (\det(2\pi \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)))^{-\frac{1}{2}} \int_{B_1\times\cdots\times B_N} dx \, \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(x_k - \langle f_k, A\rangle)^2}{\lambda_k}\right]\\
&= \int_{B_1\times\cdots\times B_N} \prod_{j=1}^{N}\mathcal{N}(0,\lambda_j)(dx)\, \exp\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{x_k\langle f_k, A\rangle}{\lambda_k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\langle f_k, A\rangle^2}{\lambda_k}\right]\\
&= \int e^{Q^{-1}(A_N,\cdot) - \frac{1}{2}Q^{-1}[A_N]} \mathbb{1}_{B_1\times\cdots\times B_N}(\langle f_1,\cdot\rangle,\ldots,\langle f_N,\cdot\rangle)dP\\
&\underset{M\geq N}{=} \int e^{Q^{-1}(A_M,\cdot) - \frac{1}{2}Q^{-1}[A_M]} \mathbb{1}_{\bigcap_{k=1}^{N}\{\langle f_k,\cdot\rangle \in B_k\}} dP\\
&\underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \int e^{Q^{-1}(A,\cdot) - \frac{1}{2}Q^{-1}[A]} \mathbb{1}_{\bigcap_{k=1}^{N}\{\langle f_k,\cdot\rangle \in B_k\}} dP
\end{aligned}
$$

2.) $\Rightarrow$ 1.): Wir bemerken, dass

$$
\begin{aligned}
X_N &:= e^{Q^{-1}(A_N,\cdot) - \frac{1}{2}Q^{-1}[A_N]}\\
&= \exp\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\langle f_k, A\rangle\langle f_k,\cdot\rangle}{\lambda_k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\langle f_k, A\rangle^2}{\lambda_k}\right]\\
&= \exp\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\langle f_k, A\rangle(\langle f_k,\cdot\rangle - \langle f_k, A\rangle)}{\lambda_k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\langle f_k, A\rangle^2}{\lambda_k}\right] \exp\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\langle f_k, A\rangle^2}{\lambda_k}\right]\\
&=: Y_N \exp\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\langle f_k, A\rangle^2}{\lambda_k}\right]
\end{aligned}
$$

ein nichtnegatives Martingal bezüglich P und der Filtration $\sigma(\langle f_1,\cdot\rangle,\ldots,\langle f_N,\cdot\rangle)$ ist. Insbesondere konvergiert X_N in $\mathbb{R}$ P-f.s. . Y_N ist ein Martingal bezüglich $P \circ T_A^{-1}$ und derselben Filtration und daher gilt: X_N konvergiert $P \circ T_A^{-1}$-f.s. in $\mathbb{R}$ genau dann, wenn

$$
\exp\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\langle f_k, A\rangle^2}{\lambda_k}\right] \quad \text{konvergiert, also} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle f_k, A\rangle^2}{\lambda_k} < \infty.
$$

Und falls

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle f_k, A\rangle^2}{\lambda_k} = \infty,
$$

so haben wir

$$P \circ T_A^{-1}[X_N \text{ konvergiert in } \mathbb{R}] = 0.$$

□

9 Anwendungsbeispiele

9.1 Vakuumdynamik und Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Resultate des vorangegangenen Kapitels 7 ermöglichen es uns für externe Ströme $J \in L^1_h(d\tau)$ die zeitliche Entwicklung des Photonenfeldes im Schrödungerbild explizit zu bestimmen. Wir wollen nun ein Gefühl dafür bekommen, wie man mit dieser Erkenntnis arbeiten kann und einige einfache Anwendungen präsentieren. Der wohl einfachste denkbare Zustand für das elektromagnetische Feld ist der Grundzustand der freien Dynamik, das Vakuum $\Omega = 1 \in L^2(V, P)$, welches dem Zustand $|0\rangle = 1 \in h_{\mathbb{C}}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$ im klassischen Fockraumbild entspricht. Wir können der Darstellung (21) aus Abschnitt 7.2 der Photonenfelddynamik sofort entnehmen, dass Ω invariant unter der freien Zeitentwicklung $U^0_{t,T}$ ist. Mit äußerem Strom gilt hingegen

$$\Omega_t := U_{t,T}\Omega = \exp[i\chi_t^T + \langle i \int_\tau e^{i\omega(\tau - t)}, \cdot\rangle]. \tag{29}$$

Man kann diesem einfachsten aller Zustände bereits ansehen, dass es schwierig sein wird, die Klasse der zulässigen Ströme auf mehr als h-wertige Funktionen zu erweitern, weil $\langle p, \cdot\rangle$ schon für $p \in h$ nur P-f.s. existiert. Man kann jedem normalisierten Zustand $\Psi \in L^2(V, P)$, wie im Schrödingerbild der Quantenmechanik für N Teilchen üblich, eine Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi|^2$ auf dem Konfigurationsraum zuordnen. Im Folgenden wollen wir etwas genauer untersuchen, wie diese Dichte sich unter dem Einfluss der Photonenfelddynamik verhält. An dieser Stelle betrachten wir zunächst Startzustände

$$\Psi_T^b := e^{\langle b, \cdot\rangle - Q[b]} \qquad \text{mit} \qquad b \in h.$$

Wir sehen wieder mit (21), dass

$$|\Psi_t^b|^2 = \exp\Bigg[2\Re(i\chi_t^T) + 4Q(b, c(T-t)\int_\tau s(\tau - t)) + 2Q[s(T-t)b] \\ + \langle 2c(T-t)b - 2\int_\tau s(\tau - t), \cdot\rangle - 2Q[b]\Bigg]$$

ist mit

$$
\begin{aligned}
&\Re(i\chi_t^T)\\
&= -\int_t^T d\tau Q(\int_{\sigma\in[\tau,T]} c(\sigma-\tau), J_\tau) + \frac{1}{2}Q[\int_\tau c(\tau-t)] - \frac{1}{2}Q[\int_\tau s(\tau-t)]\\
&\underset{(\star)}{=} -\frac{1}{2}\int_t^T d\tau \int_t^T d\sigma \left(Q(c(\sigma-t)J_\sigma, c(\tau-t)J_\tau) + Q(s(\sigma-t)J_\sigma, s(\tau-t)J_\tau)\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2}Q[\int_\tau c(\tau-t)] - \frac{1}{2}Q[\int_\tau s(\tau-t)]\\
&= -Q[\int_\tau s(\tau-t)],
\end{aligned}
$$

wobei wir in $(\star)$ die Achsensymmetrie des Cosinus ausgenutzt haben. Betrachten wir nun das Wahrscheinlichkeitsmaß $|\Psi_t^b|^2 dP$ und wenden den Satz aus Abschnitt 8.1 über Translationen Gaußscher Maße mit der Notation

$$
B_t := -\frac{1}{\omega}\int_\tau s(\tau-t)
$$

an.

$$
\begin{aligned}
&|\Psi_t^b|^2 dP\\
&= \exp\left[\langle 2c(T-t)b, \cdot - B_t\rangle - \frac{1}{2}Q[2c(T-t)b]\right] dP \circ T_{B_t}^{-1}\\
&= \left(|\Psi_T^{2c(T-t)b}|^2 dP\right) \circ T_{B_t}^{-1}
\end{aligned}
$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$
Q^{-1}[B_t] = 4Q[\int_\tau s(\tau-t)] < \infty \qquad \text{und} \qquad Q^{-1}(B_t,\cdot) = 2\langle B_t,\cdot\rangle.
$$

Wir können also den vom Strom abhängigen Term in der Dynamik in das Maß P absorbieren, was es möglich macht die zulässige Klasse von Strömen zu erweitern, wenn wir nur an der zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsdichte interessiert sind. Wir entnehmen der obigen Rechnung, dass die Vakuumwahrscheinlichkeitsdichte schlicht $P \circ T_{B_t}^{-1}$ ist.

Für eine Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ mit endlichem Lebeguemaß $\lambda(B)$ nennen wir

$$
A(B) := \left(\frac{1}{\lambda(B)} E[\langle e_l 1_B, \cdot\rangle |\Psi_t|^2]\right)_{l=1}^3
$$

die mittlere A-Feldstärke auf B. Für das Vakuum lässt sich dies explizit berechnen:

$$
\begin{aligned}
&E[\langle b,\cdot\rangle|\Omega_t|^2] \\
&= \int \langle b, A\rangle P\circ T_{B_t}^{-1}(dA) \\
&= \int \langle b, A+B_t\rangle P(dA) \\
&= \langle b, B_t\rangle + E[\langle b,\cdot\rangle] \\
&= -\langle b, \frac{1}{\omega}\int_\tau s(\tau-t)\rangle
\end{aligned}
$$

und für

$$b = \frac{e_l}{\lambda(B)} 1_B$$

und genügend reguläres J erhalten wir damit

$$A(B) = -\frac{1}{\lambda(B)}\int_B dx \int \frac{dk}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{ix\cdot k}\int_t^T d\tau \frac{\sin(|k|(\tau-t))}{|k|}\hat{J}_\tau(k).$$

Eine Rechnung im Raum der temperierten Distributionen zeigt

$$-\frac{\widehat{\sin(|\cdot|a)}}{|\cdot|}(dx) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(|x|+a)-\delta(|x|-a)}{|x|}dx,$$

also gilt formal für J die Gleichung

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\omega}\int_\tau s(\tau-t) \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_t^T d\tau \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\delta(|y|+\tau-t)-\delta(|y|-\tau+t)}{|y|}dy \star J_\tau\right)(x) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_t^T d\tau \int \frac{\delta(|x-y|+\tau-t)-\delta(|x-y|-\tau+t)}{|x-y|}J_\tau(y)dy \\
&\underset{T\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{4\pi}\int \frac{J_{|x-y|-t}(y)}{|x-y|}dy,
\end{aligned}
$$

was gerade die Lösung der klassischen Feldgleichung (6) darstellt.

9.2 Einige Erwartungswerte

Wir wollen in diesem Abschnitt ein paar einfache Erwartungswerte berechnen. Zunächst müssen wir dafür die entsprechenden Operatoren ins Schrödingerbild übersetzen. Wir beginnen mit dem Photonenzahloperator des klassischen Fockraumbildes

$$\mathcal{N} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^* a_j,$$

wobei die Summe über eine Q-Orthonormalbasis $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ läuft und a_j^*, a_j wie im Abschnitt 6.2 die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind. Ist F der Isomorphismus zwischen dem klassischen Fockraum und $L^2(P)$ und $F\Phi_t$ im Definitionsbereich von $\mathcal{N}$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} Q(\overline{F\Psi_t}, \mathcal{N}F\Psi_t) &= \sum_{j=1}^{\infty} Q(\overline{a_j F\Psi_t}, a_j F\Psi_t) \\ &= \sum_j E[\overline{Q(D\Psi_t, f_j)} Q(D\Psi_t, f_j)] = E[\bar{Q}[D\Psi_t]]. \end{aligned}$$

Wir wissen aus Lemma 2 des Abschnittes 7.6, dass dieser Ausdruck invariant unter der freien Zeitentwicklung ist. Außerdem entnehmen wir der Rechnung im Satz desselben Abschnitts, dass

$$\begin{aligned} &E[\bar{Q}[D\Psi_t]] \\ &= E[\bar{Q}[D\Psi_T]] - 2\Im\left(E[\bar{Q}(D\Psi_T, \int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}\Psi_T)]\right) + \bar{Q}[\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}] E[|\Psi_T|^2] \end{aligned}$$

für alle $\Psi_T \in \mathbb{D}^{1,2}$. Fürs Vakuum erhalten wir beispielsweise:

$$\begin{aligned} &E[\bar{Q}[D\Omega_t]] \\ &= \bar{Q}[\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}] \\ &= \bar{Q}[\int_\tau c(T-\tau)] + \bar{Q}[\int_\tau s(T-\tau)] \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dk}{|k|} \left| \int_t^T d\tau e^{-i|k|(T-\tau)} \hat{J}_\tau(k) \right|^2 \end{aligned}$$

Nun schauen wir uns noch die Photonenenergie an. Der kinetische Anteil wird durch die Zweitquantisierung der 1-Photon-Energie und damit durch

$$\sum_{j,l=1}^{\infty} Q(f_j, \omega f_l) a_l^* a_j$$

beschrieben und der Erwartungswert berechnet sich wie für den Photonenzahloperator für

$$\Psi_T \in \mathbb{D}^{1,2}_{\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad \int_t^T d\tau Q[\omega^{\frac{1}{2}} J_\tau] < \infty \qquad \text{zu}$$

$$\begin{aligned} &E[\bar{Q}[\omega^{\frac{1}{2}} D\Psi_t]] \\ &= E[\bar{Q}[\omega^{\frac{1}{2}} D\Psi_T]] - 2\Im\left(E[\bar{Q}(\omega^{\frac{1}{2}} D\Psi_T, \omega^{\frac{1}{2}} \int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}\Psi_T)]\right) \\ &\quad + \bar{Q}[\omega^{\frac{1}{2}} \int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}] E[|\Psi_T|^2]. \end{aligned}$$

Für das Vakuum erhalten wir

$$E[\bar{Q}[\omega^{\frac{1}{2}}D\Omega_t]] = \frac{1}{2}\int dk \left| \int_t^T d\tau e^{-i|k|(T-\tau)}\hat{J}_\tau(k) \right|^2.$$

Ist $\Psi_T \in \mathbb{D}^{1,2}$, so ist auch der potentielle Anteil $E[\langle J_t, \cdot\rangle |\Psi_t|^2]$ wohldefiniert. Um diesen zu berechnen, schauen wir uns zunächst $E[\langle c, \cdot\rangle |\Psi_t|^2]$ für festes $c \in h$ unter der freien Dynamik an. Wir beginnen wieder mit einfachen Anfangszuständen.

$$\begin{aligned}
&E[\langle c, \cdot\rangle \overline{\Psi_t^a}\Psi_t^b] \\
&= E[Q(c, D\overline{\Psi_t^a})\Psi_t^b] + E[Q(c, D\Psi_t^b)\overline{\Psi_t^a}] \\
&= Q(c, e^{-i\omega(T-t)}\bar{a})E[\overline{\Psi_t^a}\Psi_t^b] + Q(c, e^{i\omega(T-t)}\bar{b})E[\overline{\Psi_t^a}\Psi_t^b] \\
&= E[Q(e^{-i\omega(T-t)}c, D\overline{\Psi_T^a})\Psi_T^b] + E[Q(e^{-i\omega(T-t)}c, D\Psi_T^b)\overline{\Psi_T^a}]
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir durch Approximation nach Lemma 1 des Abschnittes 7.6

$$E[\langle c, \cdot\rangle |\Psi_t|^2] = 2\Re\left(E[Q(e^{i\omega(T-t)}c, D\Psi_T)\overline{\Psi_T}]\right)$$

unter der freien Dynamik. Nun also die Rechnung mit externem Strom und der Notation $A_t = \frac{1}{\omega}\int_\tau s(T-\tau)$:

$$\begin{aligned}
&E[\langle J_t, \cdot\rangle |\Psi_t|^2] \\
&= 2\Re\left(E[Q(e^{i\omega(T-t)}J_t, D\left(\Psi_T \circ T_{A_t}^{-1}\Omega_t^I\right))\overline{\Psi_T \circ T_{A_t}^{-1}\Omega_t^I}]\right) \\
&= 2\Re\left(E[Q(e^{i\omega(T-t)}J_t, (D\Psi_T)\circ T_{A_t}^{-1} + i\int_\tau e^{-i\omega(T-\tau)}\Psi_T \circ T_{A_t}^{-1})\overline{\Psi_T} \circ T_{A_t}^{-1}|\Omega_t^I|^2]\right) \\
&= 2\Re\left(Q(e^{i\omega(T-t)}J_t, D\Psi_T)\overline{\Psi_T}\right) - 2\Im\left(Q(J_t, \int_\tau e^{i\omega(\tau-t)})\right)E[|\Psi_T|^2]
\end{aligned}$$

Und für das Vakuum erhält man

$$\begin{aligned}
E[\langle J_t, \cdot\rangle |\Omega_t|^2] &= -2Q(J_t, \int_\tau s(\tau - t)) \\
&= -\int \frac{dk}{|k|}\int_t^T d\tau \, \sin(|k|(\tau-t))\overline{\hat{J}_t(k)} \cdot \hat{J}_\tau(k).
\end{aligned}$$

9.3 Stationäre Stromprobleme

Falls der Strom $J \in h$ von der Zeit unabhängig ist, sprechen wir von einem stationären Stromproblem. Für diesen Fall vereinfachen sich unsere Lösungsformeln, da wir zeitliche Integrale über J explizit ausführen können.

$$\int_\tau e^{i\omega(\tau-t)} = \frac{e^{i\omega(T-t)} - 1}{i\omega}J$$

Wir erhalten zum Beispiel mit $S := T - t$:

$$U_{t,T} e^{\langle b,\cdot\rangle} = \exp\Big[\frac{i}{2} Q(J, \omega^{-2}(3 + 2i\omega S - 4e^{i\omega S} + e^{2i\omega S})J) - iQ(b, e^{i\omega S} s(S) b) \\ + 2Q(b, \omega^{-1} e^{i\omega S}(1 - c(S))J) + \langle e^{i\omega S} b + \omega^{-1}(e^{i\omega S} - 1)J, \cdot\rangle\Big]$$

und im Wechselwirkungsbild:

$$U^I_{t,T}\Phi = \Phi\left(\cdot - \omega^{-2}(1 - c(S))J\right) \exp\Big[\frac{1}{2} Q(J, \omega^{-2}(3 - 4c(S) - 2S + 2e^{-2i\omega S})J) \\ + \langle \omega^{-1}(1 - e^{-i\omega S})J, \cdot\rangle\Big]$$

Da die unitäre Entwicklung nur noch von der Zeitdifferenz abhängt, wird sie somit zu einem Gruppenhomomorphismus.

Stationäre Ströme erlauben auch ein einfaches Lösungsverfahren im klassischen Fockraumbild. Ein bekannter Satz aus der Bogolubov-Theorie ermöglicht es nämlich Hamiltonians der für uns relevanten Form in einen quadratischen Ausdruck der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu transformieren. Wir wollen dieses Verfahren hier kurz wiedergeben. Sei dafür $J \in h$ mit $g := -\frac{1}{\omega} J \in h$. Dann existiert nach dem oben erwähnten Satz eine unitäre Transformation U_g auf $\bigoplus_{n=0}^{\infty} h_{\mathbb{C}}^{\tilde{\otimes} n}$, so dass für alle $b \in h$:[21]

$$U_g^* a(b) U_g = a(b) + Q(b, g)$$

gilt. Wir erhalten damit für unseren Hamiltonian (19):

$$\begin{aligned} & U_g^* \left(\sum_{j,l} Q(e_j, \omega e_l) a_l^* a_j + \sum_j Q(e_j, J)(a_j^* + a_j) \right) U_g \\ &= \sum_{j,l} Q(e_j, \omega e_l)(a_l^* + Q(e_l, g))(a_j + Q(e_l, g)) + \sum_j Q(e_j, J)(a_j^* + a_j + 2Q(e_j, g)) \\ &= \sum_{j,l} Q(e_j, \omega e_l) a_l^* a_j + \sum_j Q(e_j, \omega g) a_j + \sum_l Q(e_l, \omega g) a_l^* + Q(g, \omega g) \\ &\quad + \sum_j Q(e_j, J)(a_j^* + a_j) + 2Q(J, g) \\ &= \sum_{j,l} Q(e_j, \omega e_l) a_l^* a_j - Q(J, \frac{1}{\omega} J), \end{aligned}$$

was bis auf die konstante Verschiebung der freie Hamiltonian ist. Natürlich stellt sich sofort die Frage, wie diese Transformation, die aus unserer Dynamik mit externem Strom eine freie macht, in der $L^2(P)$-Formulierung aussieht. Nach den

[21] Siehe Anhang A.7

Überlegungen dieses Abschnittes erscheint es naheliegend, für U_g eine Translation zu erwarten. Und tatsächlich zeigen wir nun, dass

$$\tilde{U}_g \Psi := F^{-1} U_g F \Psi = \Psi(\cdot - \frac{1}{\omega} g) \exp[\langle g, \cdot \rangle - Q[g]]$$

ist. Denn wir haben für $\Psi \in \mathbb{D}^{1,2}$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{U}_g^* D_b \Psi(\cdot - \frac{1}{\omega} g) \exp[\langle g, \cdot \rangle - Q[g]] \\
&= \tilde{U}_g^* \left(\left((D_b \Psi)(\cdot - \frac{1}{2\omega} g) + Q(b,g) \Psi(\cdot - \frac{1}{\omega} g) \right) \exp[\langle g, \cdot \rangle - Q[g]] \right) \\
&= D_b \Psi + Q(b,g) \Psi
\end{aligned}$$

und $\tilde{U}_g$ ist mit dem Satz in Abschnitt 8.1 unitär.

10 Dynamische Theorie des Photonenfeldes und das Pfadintegral

10.1 Idee des Pfadintegrals

Die Idee des Pfadintegrals ist ebenso einfach wie genial. Die Lösung der Quantenmechanischen Bewegungsgleichung (18) oder genauer der zugehörige Integralkern wird als gewichtetes Integral über alle klassischen Pfade geschrieben. Diese Pfade müssen dabei die klassische Bewegungsgleichung nicht erfüllen, jedoch trägt die klassische Lösung wegen der stationären Phase den wesentlichen Anteil zum Integral bei. Die Gewichtung im Falle des quantenmechanischen Pfadinterals ist durch eine Phasenfunktion gegeben und wir können symbolisch schreiben:

$$\langle \Phi, U^J_{t,t_0} \Psi \rangle = \int dA \, e^{iS^J[A]} \Phi(A_t) \Psi(A_{t_0}) \tag{30}$$

Dabei ist dA ein Symbol für das flache Maß auf dem unendlich dimensionalen Raum aller klassischen Wege. Wie wir wissen, existiert ein solches Maß nicht, also werden wir einen Ersatz finden müssen. Die Phasenfunktion ist die klassische Wirkung

$$S^J[A] = \int_{t_0}^{t} d\tau \, (\langle \dot{A}_\tau, \dot{A}_\tau \rangle - \langle \omega A_\tau, \omega A_\tau \rangle + \langle J_\tau, A_\tau \rangle)$$

für das elektromagnetische Potential. Das Hauptproblem bei der mathematischen Formalisierung des intuitiven Ausdrucks (30) ist, dass die Gewichtsfunktion nicht abfällt. Das Integral ist stark oszillierend und dies macht Fragen nach Existenz bzw. Konvergenz des Integrals extrem schwierig. Anders sieht die Situation im stochastischen Fall aus. Die Lösung der stochastischen Variante unserer Bewegungsgleichung (18), welche in Kapitel 5 diskutiert wurde, lässt sich als Pfadintegral in der Form

$$\langle \Phi, U^{\mathrm{st},J}_{t,t_0} \Psi \rangle = \int dA \, e^{-S^{st,0}[A]} e^{-\int_{t_0}^{t} d\tau \langle J_\tau, A_\tau \rangle} \Phi(A_t) \Psi(A_{t_0}) \tag{31}$$

schreiben. Hierbei bezeichnet $dA\, e^{-S^{st,0}[A]}$ das Pfadmaß des Ohrnstein-Uhlenbeck Prozesses, also

$$S^{st,0}[A] = \int_{t_0}^{t} d\tau\, (\langle \dot{A}_\tau, \dot{A}_\tau \rangle + \langle \omega A_\tau, \omega A_\tau \rangle).$$

Es wird im Folgenden unser Ziel sein, zu analysieren, was der Zusammenhang der Lösungsformel (21) mit dem Pfadintegral (30) ist und was für ein Objekt der Integrand im quantenmechanischen Pfadintegral darstellt.

10.2 Wick-Rotation der Zeit und Nichtexistenz eines Pfadmaßes

Eine erste Idee sich an das quantenmechanische Pfadintegral heranzutasten, könnte darin bestehen, zunächst das wohldefinierte stochastische Pfadintegral zu betrachten und in diesem eine Wick-Rotation

$$t \to zt = (\alpha + i\beta)t$$

der Zeit durchzuführen, also der Zeit eine imaginäre Komponente zu geben. Für $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ sind wir im quantenmechanischen Fall. Wir betrachten nun also die modifizierte Bewegungsgleichung

$$-\frac{1}{z}\partial_t \Psi_t = H^J \Psi_t = (H^0 + \langle J_t, \cdot \rangle)\Psi_t \tag{32}$$

wobei H^0 der Hamiltonian des freien Photonenfeldes aus (20) ist und $\alpha, \beta \geq 0$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gilt. Wir wollen uns nun an die heuristische Rechnung erinnern, welche den Zusammenhang zwischen der Lösung der Bewegungsgleichung und dem Pfadintegral herstellt. Diese Rechnung führen wir wieder für den Fall des n-dimensionalen Harmonischen Oszillators durch. Wegen der Wick-Rotation sind wir jedoch an den Matrixelementen des Operators $U^{z,J}_{t,t_0}$ interessiert, der einen Startwert $f(t_0)$ auf den Wert der Lösung $f(t)$ von (32) mit diesem Startwert zum Zeitpunkt t schickt. Hierbei ist

$$H^0 = -\frac{1}{2}m^{-1}[d] + \frac{1}{2}m\omega^2.$$

Wir schreiben dabei kurz $t_j = t_0 + j\frac{t-t_0}{N}$.

$$\begin{aligned}
&\int dx\, f(x)(U^{z,J}_{t,t_0} g)(x) \\
&= \lim_{N\to\infty} \int dx\, f(x) \prod_{j=0}^{N-1} \left(\left(e^{-z\frac{t-t_0}{N}(-\frac{1}{2}m^{-1}[d])} e^{-z\frac{t-t_0}{N}(\frac{1}{2}m\omega^2 + \langle J_{t_j}, \cdot\rangle)} \right) g \right)(x) \\
&= \left(\det \frac{NM}{2\pi z(t-t_0)} \right)^{\frac{N}{2}} \int dx_N \ldots \int dx_0\, f(x_N) g(x_0) \\
&\qquad \exp\left[-\frac{1}{2z} \sum_{j=0}^{N-1} m \left[\frac{N(y-x)}{t-t_0} \right] \frac{t-t_0}{N} - z \sum_{j=0}^{N-1} (\frac{1}{2} m[\omega x_j] + \langle J_{t_j}, x_j \rangle) \frac{t-t_0}{N} \right] \\
&= \text{const} \int dx\, f(x_t) g(x_{t_0}) e^{-\frac{1}{2z}\int_{t_0}^t d\tau\, m[\dot{x}_\tau] - \frac{z}{2}\int_{t_0}^t d\tau\, m[\omega x_\tau] - z\int_{t_0}^t d\tau\, \langle J_\tau, x_\tau \rangle}
\end{aligned} \tag{33}$$

Wir rechnen weiter heuristisch und führen das freie Wick-rotierte Pfadmaß ein.

$$\mu^z_{f,g}(dx) := \text{const} f(x_t) g(x_{t_0}) e^{-\frac{1}{2z}\int_{t_0}^t d\tau\, m[\dot{x}_\tau] - \frac{z}{2}\int_{t_0}^t d\tau\, m[\omega x_\tau]}\, dx \tag{34}$$

Etwas genauer sollte man hier von einer über f und g ausgeschmierten Maß-wertigen Distribution sprechen. Wir werden allerdings später sehen, dass dieser Ausdruck nur für den Fall $z = 1$ Sinn macht, also gerade im stochastischen Fall. Nehmen wir jedoch zunächst an, dies wäre tatsächlich ein komplexes Maß auf einem geeigneten Pfadraum. Dann vereinfacht sich die Formel für die Matrixelemente unserer Dynamik zu

$$\int dx\, f(x)(U^{z,J}_{t,t_0} g)(x) = \int \mu^z_{f,g}(dx) e^{i\int_{t_0}^t d\tau \langle izJ_\tau, x_\tau \rangle}. \tag{35}$$

Es gibt also einen engen Zusammenhang zwischen der Lösung unserer Photonenfeldgleichung (18) und der Fouriertransformation des freien Pfadmaßes. Da wir in (21) eine explizite Formel für die Lösung der Photonenfeldgleichung gefunden haben, müsste es uns insbesondere möglich sein, das Maß $\mu^z_{f,g}$ zu bestimmen, falls es existiert. Den Rest dieses Abschnittes werden wir uns mit dieser Frage beschäftigen und am Ende das enttäuschende Resultat erhalten, dass das Pfadmaß nur dann existiert, wenn $z = 1$ ist. Der Grund hierfür ist, dass durch die extrem irreguläre Phasenfunktion sogar der Raum der komplexwertigen Maße nicht ausreicht, den Integranden des Pfadintegrals zu fassen. Im Abschnitt 10.3 werden wir dieses Problem zu beheben wissen, indem wir als Integrand auch Distributionen zulassen. Um eine einfache Formel für die Matrixelemente von $U^{z,J}_{t,t_0}$ zu erhalten, beschränken wir uns wie schon so häufig auf den Fall

$$f = e^{\langle a, \cdot \rangle - \frac{1}{4}\langle a, \frac{1}{\omega} a \rangle} \qquad \text{und} \qquad g = e^{\langle b, \cdot \rangle - \frac{1}{4}\langle b, \frac{1}{\omega} b \rangle}.$$

Anstatt nun alle Rechnungen aus Kapitel 7 zu wiederholen, werden wir die korrekte Formel für die Lösung der Wick-rotierten Gleichung (32) erraten, indem wir in der Formel (21) alle Zeiten t durch Wick-rotierte Zeiten zt ersetzen. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&U^{z,J}_{t,t_0} e^{\langle b,\,\cdot\,\rangle} \\
&= \exp\Big[\frac{z^2}{4}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\sigma \langle J_\sigma, \frac{1}{\omega}(e^{-z\omega|\sigma-\tau|} - e^{-z\omega(2t-\tau-\sigma)})J_\tau\rangle \\
&\qquad - z\langle b, \frac{1}{\omega} e^{-z\omega(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} d\tau\, \sinh(z\omega(t-\tau))J_\tau\rangle \\
&\qquad + \frac{1}{2}\langle b, \frac{1}{\omega} e^{-z\omega(t-t_0)} \sinh(z\omega(t-t_0))b\rangle \\
&\qquad + \langle e^{-z\omega(t-t_0)}b - z\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-z\omega(t-\tau)}J_\tau,\,\cdot\,\rangle\Big]
\end{aligned} \tag{36}$$

Indem wir explizit den Operator $\frac{1}{z}\partial_t - \frac{1}{2}m^{-1}[d] + \langle \omega d,\,\cdot\,\rangle + \langle J_t,\,\cdot\,\rangle$ auf diesen Vektor wirken lassen, können wir uns davon überzeugen, dass es sich um eine Lösung von Gleichung (32) handelt. Nun benutzen wir

$$\begin{aligned}
&E\left[e^{\langle a,\,\cdot\,\rangle} e^{\langle e^{-z\omega(t-t_0)}b - z\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-z\omega(t-\tau)}J_\tau,\,\cdot\,\rangle}\right] \\
&= e^{\frac{1}{2}Q\left[a + e^{-z\omega(t-t_0)}b - z\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-z\omega(t-\tau)}J_\tau\right]}
\end{aligned} \tag{37}$$

mit $Q = \frac{1}{2}\langle\,\cdot\,, \frac{1}{\omega}\,\cdot\,\rangle$, um zusammen mit (36) das gewünschte Matrixelement zu berechnen.

$$\begin{aligned}
(U^{z,J}_{t,t_0})_{a\,b} &:= E\left[e^{\langle a,\,\cdot\,\rangle - \frac{1}{4}\langle a, \frac{1}{\omega}a\rangle} U^{z,J}_{t,t_0} e^{\langle b,\,\cdot\,\rangle - \frac{1}{4}\langle b, \frac{1}{\omega}b\rangle}\right] \\
&= e^{\frac{z^2}{4}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\sigma \langle J_\sigma, \frac{1}{\omega}e^{-z\omega|\sigma-\tau|}J_\tau\rangle} \\
&\qquad e^{-\frac{z}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \langle \frac{1}{\omega}(e^{-z\omega(t-\tau)}a + e^{-z\omega(2t-t_0-\tau)}b), J_\tau\rangle}
\end{aligned} \tag{38}$$

Da wir uns für die Fouriertransformation des Pfadmaßes interessieren, ersetzen wir in der Gleichung (35) formal $J \to -\frac{i}{z}J$ und erhalten mit der Kurznotation $\mu^z_{a,b}$ statt $\mu^z_{f,g}$:

$$\begin{aligned}
&\int \mu^z_{a,b}(dA) e^{i\int_{t_0}^{t} d\tau \langle J_\tau, A_\tau\rangle} \\
&= e^{-\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\sigma \langle J_\sigma, \frac{1}{\omega}e^{-z\omega|\sigma-\tau|}J_\tau\rangle + i\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \langle \frac{1}{\omega}(e^{-z\omega(t-\tau)}a + e^{-z\omega(2t-t_0-\tau)}b), J_\tau\rangle} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\Delta^z[J] + i\int_{t_0}^{t} d\tau \langle \eta^z_{a,b}(\tau), J_\tau\rangle},
\end{aligned} \tag{39}$$

wo wir die quadratische Form

$$\Delta^z[J] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\sigma \langle J_\sigma, \frac{1}{\omega}e^{-z\omega|\sigma-\tau|}J_\tau\rangle$$

und den von a und b abhängigen Vektor

$$\eta^z_{a,b}(\tau) = \frac{1}{2\omega}(e^{-z\omega(t-\tau)}a + e^{-z\omega(2t-t_0-\tau)}b)$$

eingeführt haben. Die Form der Fouriertransformation (39) stimmt uns optimistisch, dass es sich bei $\mu^z_{a,b}$ um ein Gaußsches Maß handeln könnte. Die Kovarianz müsste dann Δ^z sein. Um die Rolle von η zu verstehen betrachten wir die endlich-dimensionale Formel

$$\int dx\,(\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\langle x-\eta, A^{-1}(x-\eta)\rangle} e^{i\langle J,x\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle J,AJ\rangle + i\langle J,\eta\rangle} \tag{40}$$

wo η einfach eine Verschiebung ist bzw. zu einer zusätzlichen Dichte der Form $e^{\langle x,A^{-1}\eta\rangle - \frac{1}{2}\langle \eta, A^{-1}\eta\rangle}$ im Fourier-transformierten Maß führt. Natürlich wird die quadratische Form Δ^z, die im endlich-dimensionalen der Form $\langle\,\cdot\,, A\,\cdot\,\rangle$ entspricht, nicht positiv definit sein. Tatsächlich stammt Δ^z von einem Operator

$$(A^z J)_\tau = \int_{t_0}^t d\tau\, A^z_{\tau-\sigma} J_\sigma, \qquad \text{wo} \qquad A^z_\tau = \frac{1}{2\omega} e^{-z\omega|\tau|}$$

ist. $A^z = U^z + iV^z$ lässt sich in einen Real- und Imaginärteil zerlegen, wobei U und V reelle symmetrische Operatoren sind.

$$\begin{aligned}(U^z J)_\tau &= \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^t d\tau\, e^{-\alpha\omega|\tau-\sigma|}\cos(\beta\omega|\tau-\sigma|)J_\sigma \\ (V^z J)_\tau &= \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^t d\tau\, e^{-\alpha\omega|\tau-\sigma|}\sin(\beta\omega|\tau-\sigma|)J_\sigma\end{aligned} \tag{41}$$

Während V^z über kein eindeutiges Vorzeichen verfügt, ist der Operator U^z positiv definit, solange $\alpha > 0$. Im Falle $\alpha = 0$ ist U^z ein Rang-2-Operator. Und zumindest die endlich-dimensionale Formel (40) macht auch Sinn solange

$$U = \Re A = \frac{1}{2}(A + A^*)$$

positiv definit ist. Dies ergibt sich aus folgendem

Lemma 1:
Seien U und V reelle symmetrische $n \times n$-Matrixen und zusätzlich U positiv definit. Außerdem sei $\eta \in \mathbb{C}^n$. Wir setzen $\Delta(J,L) := \langle J, AL\rangle$ für alle $J, L \in \mathbb{R}^n$, wobei $A := U + iV$ ist. Des weiteren seien

$$W := U^{-\frac{1}{2}} V U^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad G := U + VU^{-1}V.$$

Dann gilt

- A ist invertierbar.
- $\Re A^{-1}$ ist positiv definit und $G^{-1} = \Re A^{-1}$.
- $\varphi(J) := e^{-\frac{1}{2}\Delta[J] + i\langle \eta, J\rangle}$ ist die Fouriertransformation des komplexen Maßes

$$\mu(dx) = (\det(2\pi A))^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\langle x-\eta, A^{-1}(x-\eta)\rangle} dx.$$

- $\big(\det(1+W^2)\big)^{-1} = \det(U\Re A^{-1})$
- Das Totalvariationsmaß von μ hat die Form

$$\begin{aligned}|\mu|(dx) =& (\det(1+W^2))^{\frac{1}{4}}(\det(2\pi G))^{-\frac{1}{2}}\\ & e^{-\frac{1}{2}\langle x-\Re\eta-VU^{-1}\Im\eta, G^{-1}(x-\Re\eta-VU^{-1}\Im\eta)\rangle+\frac{1}{2}\langle\Im\eta,U^{-1}\Im\eta\rangle}dx.\end{aligned}$$

Beweis:
W wie oben definiert ist eine symmetrische reelle Matrix und

$$A = U^{\frac{1}{2}}(1+iW)U^{\frac{1}{2}}$$

ist offenbar invertierbar, da U positiv difinit ist und $1+iW$ invertierbar ist. Wir berechnen nun

$$\Re A^{-1} = \Re\, U^{-\frac{1}{2}}\frac{1-iW}{1+W^2}U^{-\frac{1}{2}} = U^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{1+W^2}U^{-\frac{1}{2}} = (U^{\frac{1}{2}}(1{+}W^2)U^{\frac{1}{2}})^{-1} = G^{-1},$$

was offenbar positiv definit ist. Es folgt, dass μ wie oben tatsächlich ein komplexes Maß definiert und man rechnet wie üblich nach, dass φ die Fouriertransformation dieses Maßes ist. Die Formel für die Determinanten ergibt sich sofort aus

$$\det(U\Re A^{-1}) = \det(U^{\frac{1}{2}}\Re A^{-1}U^{\frac{1}{2}}) = \det(1+W^2)^{-1}.$$

Es bleibt, die Totalvariation $|\mu|$ zu berechnen. Die Lebegue-Dichte von $|\mu|$ ist schlicht der Absolutbetrag der Lebegue-Dichte von μ. Wir berechnen die einzelnen Terme. Seien dazu $w_1, \dots, w_n$ die Eigenwerte von W.

$$\begin{aligned}|\det A| &= \det U|\det(1+iW)|\\ &= \det U\prod_{j=1}^n |1+iw_j|\\ &= \det U\prod_{j=1}^n\sqrt{1+w_j^2}\\ &= \det U\det(1+W^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Da $|e^{\zeta}| = e^{\Re\zeta}$ für jedes komplexe ζ müssen wir berechnen:

$$\begin{aligned}
&\Re\left(-\frac{1}{2}\langle x, A^{-1}x\rangle + \langle x, A^{-1}\eta\rangle - \frac{1}{2}\langle \eta, A^{-1}\eta\rangle\right)\\
&= -\frac{1}{2}\langle x, G^{-1}x\rangle + \langle x, \Re A^{-1}\Re\eta - \Im A^{-1}\Im\eta\rangle\\
&\quad - \frac{1}{2}\langle \Re\eta, \Re A^{-1}\Re\eta\rangle + \frac{1}{2}\langle \Im\eta, \Re A^{-1}\Im\eta\rangle + \langle \Re\eta, \Im A^{-1}\Im\eta\rangle\\
&= -\frac{1}{2}\langle x, G^{-1}x\rangle + \langle x, G^{-1}\Re\eta + U^{-\frac{1}{2}}\frac{W}{1+W^2}U^{-\frac{1}{2}}\Im\eta\rangle\\
&\quad - \frac{1}{2}\langle \Re\eta, G^{-1}\Re\eta\rangle + \frac{1}{2}\langle \Im\eta, G^{-1}\Im\eta\rangle - \langle \Re\eta, U^{-\frac{1}{2}}\frac{W}{1+W^2}U^{-\frac{1}{2}}\Im\eta\rangle\\
&= -\frac{1}{2}\langle x - \Re\eta, G^{-1}(x - \Re\eta)\rangle + \langle x, G^{-1}U^{\frac{1}{2}}WU^{-\frac{1}{2}}\Im\eta\rangle\\
&\quad + \frac{1}{2}\langle \Im\eta, G^{-1}\Im\eta\rangle - \langle \Re\eta, G^{-1}U^{\frac{1}{2}}WU^{-\frac{1}{2}}\Im\eta\rangle\\
&= -\frac{1}{2}\langle x - \Re\eta - VU^{-1}\Im\eta, G^{-1}(x - \Re\eta - VU^{-1}\Im\eta)\rangle\\
&\quad + \frac{1}{2}\langle \Im\eta, (G^{-1} + U^{-1}VG^{-1}VU^{-1})\Im\eta\rangle
\end{aligned}$$

Schließlich sehen wir noch, dass

$$\begin{aligned}
&G^{-1} + U^{-1}VG^{-1}VU^{-1}\\
&= U^{-\frac{1}{2}}(1+W^2)^{-1}U^{-\frac{1}{2}} + U^{-\frac{1}{2}}W(1+W^2)^{-1}WU^{-\frac{1}{2}}\\
&= U^{-1}
\end{aligned}$$

ist und damit ist der Exponent der Lebegue-Dichte von $|\mu|$ korrekt. Der von den Determinanten stammende Vorfaktor berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
|\det(2\pi A))^{-\frac{1}{2}}| &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{1}{\sqrt{|\det A|}}\\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\det U)^{-\frac{1}{2}}(\det(1+W^2))^{-\frac{1}{4}}\\
&= \det(2\pi U(1+W^2))^{-\frac{1}{2}}(\det(1+W^2))^{\frac{1}{4}}\\
&= (\det(2\pi G))^{-\frac{1}{2}}(\det(1+W^2))^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Um nun das Maß $\mu^z_{a,b}$ zu konstruieren, könnten wir folgendermaßen vorgehen. Zunächst entscheiden wir uns für einen geeigneten Hilbertraum, auf dem wir glauben, das Maß realisieren zu können. Da Δ^z auf dem Raum

$$V' = L^2([t_0, t]; H^{2,2})$$

von einem Spurklasse-Operator stammt, scheint der Dualraum

$$V = L^2([t_0, t]; H^{-2,-2})$$

ein geeigneter Kandidat zu sein. Nun wählen wir eine feste Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V' und interpretieren wie schon im Beweis des Satzes in Abschnitt 4.1 den Raum V' als den Raum quadratsummierbarer Folgen $l^2(\mathbb{N})$. Sein Dualraum V ist dann ebenfalls $l^2(\mathbb{N})$ und kann in das unendliche Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eingebettet werden. Betrachten wir nun die Projektionen P_n auf den von den ersten n Einheitsvektoren aufgespannten Unterraum von $l^2(\mathbb{N})$. Wir wollen das Maß konstruieren, dessen Fouriertransormation

$$\varphi(J) := (U^{z,J}_{t,t_0})_{a\,b}$$

ist. Also betrachten wir zunächst den endlich-dimensionalen Anteil $\varphi_n := \varphi\circ P_n$. Die Funktion φ_n hat dann die Form

$$\varphi_n(J) = e^{-\frac{1}{2}\langle J, A_n J\rangle + i\langle \eta_n, J\rangle}$$

mit den Projektionen $A_n = P_n A^z P_n$ und $\eta_n = \eta^z_{a,b}$. Nach dem Lemma ist φ_n Fouriertransformation eines Maßes μ_n auf $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Man prüft leicht, dass die Maße $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konsistente Familie bilden, also $\mu_N\circ P_n^{-1} = \mu_n$ für alle $N > n$ gilt. Obwohl jedoch alle μ_n endliche komplexe Maße sind, benötigen wir eine Kontrolle über $|\mu_n|$, um ein Maß μ auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zu finden, für das $\mu\circ P_n^{-1} = \mu_n$ gilt. Dieses Maß wäre unser gesuchtes $\mu^z_{a,b}$. Da offenbar auch die Familie $(|\mu_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konsistent ist, könnten wir zunächst versuchen $|\mu|$ zu konstruieren. Wir wollen nun jedoch argumentieren, dass für $z \neq 1$ das Maß $|\mu|$ nicht existiert. Erinnern wir uns dabei, dass jedes komplexe Maß automatisch eine endliche Totalvariation besitzt, d.h. die Nichtexistenz von $|\mu|$ als endliches Maß zieht die Nichtexistenz von μ nach sich. Zur Vereinfachung setzen wir $a = b = 0$ und damit

$$\varphi(J) = e^{-\frac{1}{2}\Delta^z[J]}.$$

Außerdem betrachten wir den Fall des endlich-dimensionalen Harmonischen Oszillators, d.h. ω ist einfach eine positiv definite Matrix. Schon in diesem Fall wird das Pfadmaß nicht existieren. Nun werfen wir einen Blick auf die Formel für das Totalvariationsmaß in Lemma 1 oben. Für den Teil des Maßes

$$(\det(2\pi G))^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\langle x, G^{-1}x\rangle} dx$$

können wir ein Analogon zumindest auf dem Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ finden, der dem Dualraum jenes Unterraumes von V' entspricht, auf dem $\langle\,\cdot\,, G\,\cdot\rangle$ von einem Spurklasse-Operator stammt. Der Faktor $\det(1+W^2)$ jedoch stellt ein Problem dar. Zunächst wissen wir aus der Aussage des Lemmas, dass

$$\det(1+W^2)^{-1} = \det((\Re A^{-1})U).$$

Wir wollen nun veranschaulichen, dass dieser Ausdruck den Limes nicht überlebt. Dazu müssen wir zunächst herausfinden, was in unserem Fall der Operator A^{-1} ist. Diese Frage ist auch sonst von großer Relevanz, denn unser Pfadmaß hat ja die heuristische Form

$$\mu(dX) = \mathrm{const} e^{-\frac{1}{2}\langle X, A^{-1}X\rangle} dX.$$

Führen wir den Differentialoperator $B^z = \frac{1}{z}(-\partial_\tau^2 + z^2\omega^2)$ ein. Eine explizite Rechnung zeigt

$$B^z A^z J = J$$

und wir sehen, dass die zu B gehörige quadratische Form

$$\frac{1}{2}\langle X, B^z X\rangle = \frac{1}{2z}\langle \dot{X}, \dot{X}\rangle + \frac{z}{2}\langle \omega X, \omega X\rangle$$

gerade der Phasenfunktion im heuristischen Pfadintegral (34) entspricht. Berechnen wir nun $\Re B^z U^z$. Wir nutzen die Identität

$$-\partial_\tau^2 U^z = z - z^2\omega^2 A^z + i\partial_\tau^2 V^z$$

und nehmen davon den Realteil. Dies liefert mit $z = \alpha + i\beta$

$$-\partial_\tau^2 U^z = \alpha - (\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 U^z + 2\alpha\beta\omega^2 V^z.$$

Da ω^2 beschränkt ist und U und V als Integraloperatoren Spurklasse sind und mit der Information, dass

$$\Re B^z = \Re(-(\alpha - i\beta)\partial_\tau^2 + (\alpha + i\beta)\omega^2) = -\alpha\partial_\tau^2 + \alpha\omega^2$$

ist, erhalten wir $\Re B^z U^z = \alpha^2 + K$. Dabei ist K ein Spurklasse-Operator. Die Determinante dieses Operators $\Re(P_n B^z P_n U^z P_n)$ wird den Limes $n \to \infty$ jedoch nur überstehen, falls $\Re B^z U^z = 1 + K$ für einen Spurklasse-Operator K ist. Und dies ist genau dann der Fall, wenn $z = \alpha = 1$ ist. Den Rest dieses Abschnitts wollen wir darauf verwenden, anhand eines einfachen Beispiels zu erklären, weshalb schon für kleine Abweichungen vom stochastischen Fall das Maß $\mu_{a,b}^z$ nicht mehr existiert. Im Folgenden bezeichnet $\mathcal{N}(0, \lambda)$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Im\lambda > 0$ das komplexe Maß mit Dichte

$$\rho_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda}}$$

bezüglich des Lebeguemaßes auf $\mathbb{R}$. Das Produktmaß $\nu^z = \bigotimes_{n=1}^\infty \mathcal{N}(0, \frac{z}{n^2})$ existiert auf $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ und hat Träger auf $l^2(\mathbb{N})$ falls $z = 1$ ist. Ist z jedoch nicht reel, so existiert das unendliche Produkt nicht. Wir berechnen leicht, dass $|\mathcal{N}(0, \lambda)|$ die Lebegue-Dichte

$$\sqrt{\frac{|\lambda|}{\Re\lambda}}\, \rho_{\frac{|\lambda|^2}{\Re\lambda}}(x)$$

hat. Das Produktmaß $\bigotimes_{n=1}^\infty |\mathcal{N}(0, \frac{z}{n^2})|$ wäre folglich ein Wahrscheinlichkeitsmaß multipliziert mit der unendlichen Konstante

$$\prod_{n=1}^\infty \sqrt{\frac{|z|}{\Re z}}.$$

Wir wollen nun die Strategie des nächsten Abschnitts vorwegnehmen und an unserem einfachen Beispiel erläutern, wie man dem Ausdruck ν^z dennoch einen

Sinn geben kann. Die Idee ist, ν^z nicht als Maß, sondern als Distribution auf einem geeigneten Testfunktionenraum aufzufassen. Um den Testfunktionenraum einzuführen benötigen wir zunächst ein geeignetes Referenzmaß. In diesem Fall bietet sich $\nu := \nu^0$ an. Auf $l^2(\mathbb{N})$ haben wir die quadratische Form

$$q(f,g) := \sum_n \frac{f_n g_n}{n^2}$$

und der größere Raum

$$h = \left\{ (f_n)_n : \sum_n \frac{f_n^2}{n^2} < \infty \right\}$$

ist der Abschluss von $l^2(\mathbb{N})$ unter q. Wir wissen dann, dass $L^2(l^2(\mathbb{N}),\nu)$ isomorph ist zu $\bigoplus_n h^{\tilde{\otimes} n}$. Außerdem sind für die Standardeinheitsvektoren $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $l^2(\mathbb{N})$ die Vektoren $(ne_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine q-Orthonormalbasis. Somit bilden die $L^2(\nu)$-Funktionen der Form

$$\Phi_\alpha = \sqrt{\alpha!} \prod_k H_{\alpha_k}(k\langle e_k, \cdot\rangle)$$

für einen Multiindex α eine Orthonormalbasis von $L^2(\nu)$. Nun führen wir den Raum $\mathcal{T}$ der Testfunktionen in $L^2(\nu)$ ein. Dazu benötigen wir eine Gewichtsfunktion $\sigma > 0$ auf Multiindices, die genügend stark wächst, dass $\sum_\alpha \frac{1}{\sigma(\alpha)}$ endlich bleibt.

$$\mathcal{T} := \left\{ \sum_\alpha r_\alpha \Phi_\alpha : \sum_\alpha \sigma(\alpha)|1-z|^{|\alpha|}(\alpha!)^4 r_\alpha^2 < \infty \right\}$$

Und das Skalarprodukt, das $\mathcal{T}$ zu einem Hilbertraum macht.

$$\langle \sum_\alpha r_\alpha \Phi_\alpha, \sum_\beta s_\beta \Phi_\beta \rangle_{\mathcal{S}} = \sum_\alpha \sigma(\alpha)|1-z|^{|\alpha|}(\alpha!)^4 r_\alpha s_\alpha$$

Wir wollen nun zeigen dass ν^z als Element des Dualraums $\mathcal{T}'$ von $\mathcal{T}$ interpretiert werden kann. Berechnen wir also zunächst die Wirkung von ν^z auf die Vektoren Φ_α.

$$\nu^z(\Phi_\alpha) = \sqrt{\alpha!} \prod_k \int \mathcal{N}(0, \frac{z}{k^2})(dx) H_{\alpha_k}(kx) = \sqrt{\alpha!} \prod_k \int \mathcal{N}(0,z)(dx) H_{\alpha_k}(x)$$

Berechnen wir nun separat dieses Integral, wobei wir die H_n definierende Identität $e^{tx-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^\infty H_n(x)\frac{t^n}{n!}$ benutzen.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \int dx\, e^{-\frac{x^2}{2z}} H_n(x) = \partial_t^n|_{t=0}\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \int dx\, \frac{e^{-\frac{x^2}{2z}+tx}}{\sqrt{2\pi z}} = \partial_t^n|_{t=0}\, e^{-\frac{1}{2}(1-z)t^2}$$

Wir benötigen also die Ableitung

$$\partial_t^n e^{-\frac{1}{2}\kappa t^2} = \kappa^{\frac{n}{2}} \partial^n_{\sqrt{\kappa}t}\, e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{\kappa}t)^2} = (-\sqrt{\kappa})^n n!\, H_n(\kappa t)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa t^2}$$

Die letzte Gleichung entnehmen wir Anhang A.2. Jetzt fehlen nur noch die Werte der Hermitepolynome bei Null. Diese erhalten wir aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} t^{2n} = e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(0)}{n!} t^n.$$

Also ist $H_n(0) = 0$ falls n ungerade ist und $H_{2m} = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^m m!}$. Insgesamt erhalten wir also

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \int dx\, e^{-\frac{x^2}{2z}} H_{2m}(x) = \frac{(-(1-z))^m ((2m)!)^2}{2^m m!}.$$

Mit der Abschätzung $(2^m m!)^2 \geq (2m)!$ bekommen wir dann

$$|\nu^z(\Phi_\alpha)| \leq (\alpha!)^2 |1-z|^{\frac{|\alpha|}{2}}.$$

Schließlich zeigen wir die Beschränktheit von ν^z über $\mathcal{S}$.

$$|\nu^z(\sum_\alpha r_\alpha \Phi_\alpha)|^2 \leq \left(\sum_\alpha \sigma(\alpha) |1-z|^{|\alpha|} (\alpha!)^4 r_\alpha^2\right) \left(\sum_\alpha \frac{|\nu^z(\Phi_\alpha)|^2}{\sigma(\alpha)|1-z|^{|\alpha|}(\alpha!)^4}\right)$$
$$\leq \left(\sum_\alpha \frac{1}{\sigma(\alpha)}\right) \left\|\sum_\alpha r_\alpha \Phi_\alpha\right\|^2_{\mathcal{S}}$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer optimistischen Bemerkung. Im Falle, dass $z = i$ ist, wir also genau im quantenmechanischen Fall sind, steht in der heuristischen Fouriertransformation unseres Pfadintegranden gerade die zur Greens-Funktion des Operators $B^i = -i(-\partial_\tau^2 - \omega^2)$ gehörende quadratische Form Δ^i. Die quadratische Form von B^i ist die Wirkung des klassischen freien elektromagnetischen Feldes. Es besteht also Hoffnung, dass wir der Pfadintegral-Formel (30) einen Sinn geben können, wenn wir nicht darauf bestehen, dass das Pfadmaß ein komplexes Maß im herkömmlichen Sinne sein muss. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass auch das Pfadmaß des freien Photonenfeldes sich als Distribution über einem Pfadraum verstehen lässt.

10.3 Das Pfadintegral als Distribution

In diesem Abschnitt wollen wir dem Integranden des Pfadintegrals einen Sinn geben und orientieren uns dabei an den Resultaten aus [23]. Wir wollen also klären, was für ein Objekt $\mu^z_{a,b}$ die heuristische Pfadintegralformel

$$\int \mu^z_{a,b}(dA) e^{i\int_{t_0}^t d\tau \langle J_\tau, A_\tau\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\Delta^z[J] + i\int_{t_0}^t d\tau \langle \eta^z_{a,b}(\tau), J_\tau\rangle} \tag{42}$$

erfüllt. Wobei $\Delta^z[J]$ die bereits eingeführte symmetrische quadratische Form

$$\Delta^z(J,L) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\sigma \langle J_\sigma, \frac{1}{\omega} e^{-z\omega|\sigma-\tau|} L_\tau \rangle$$

ist. Wir erinnern uns daran, dass der Ausdruck (42) ein durch a und b parametrisiertes Matrixelement der Dynamik $U^{z,J}_{t,t_0}$ darstellt. Genauer handelt es sich um den Wert

$$(U^{z,J}_{t,t_0})_{a\,b} = E\left[e^{\langle a,\,\cdot\,\rangle - \frac{1}{4}\langle a, \frac{1}{\omega}a\rangle} U^{z,J}_{t,t_0} e^{\langle b,\,\cdot\,\rangle - \frac{1}{4}\langle b, \frac{1}{\omega}b\rangle} \right].$$

Alle diese Matrixelemente zu kennen ist äquivalent dazu $U^{z,J}_{t,t_0}$ zu kennen, da die Vektoren der Form $e^{\langle a,\,\cdot\,\rangle}$ total im statischen Photonen-Fockraum sind. Der Vektor $\eta^z_{a,b}$ aus (42) hängt somit auch von a und b ab und hat die Form

$$\eta^z_{a,b}(\tau) = \frac{1}{2\omega}(e^{-z\omega(t-\tau)}a + e^{-z\omega(2t-t_0-\tau)}b).$$

Wir interessieren uns nur für den echten quantenmechanischen Fall $z = i$ und werden daher häufig den Index z weglassen. Wie im letzten Abschnitt diskutiert, können wir nicht darauf hoffen, dass es sich bei $\mu_{a,b}$ um ein Maß handelt. Wir werden dennoch weiterhin von einem Pfadmaß sprechen. Dieses wollen wir nun als Distribution über einem geeigneten Pfadraum auffassen. Der Pfadraum ist der Raum zeitabhängiger A-Feldkonfigurationen. Ebenso wie in der gewöhnlichen Distributionentheorie über $\mathbb{R}^n$ benötigen wir einen Testfunktionenraum und eine natürliche Paarung. Die Paarung ist im Falle des $\mathbb{R}^n$ das $L^2(dx)$-Skalarprodukt. Da das unendlich-dimensionale Analogon $L^2(dA)$ nicht existiert, benötigen wir zunächst ein geeigneten Ersatz für das flache Maß dx. Welche Wahl wir für das Referenzmaß treffen, ist vollkommen willkürlich. Wir zerlegen $\mu_{a,b}$ also in ein echtes Maß und einen Integranden.

$$\mu_{a,b}(dA) = F_{a,b}(A)\nu(dA)$$

Der Integrand $F_{a,b}$ wird nun natürlich eine Distribution sein. Das Referenzmaß ν wählen wir - wie in diesem Fall naheliegend - als das Gaußsche Maß des unendlich-dimensionalen Ohrnstein-Uhlembeck Prozesses, d.h. das Pfadmaß im stochastischen Fall $z = 1$. Wir beginnen mit der Konstruktion von ν auf den A-Feldkonfigurationen. Die Regularität der Pfade wird wie schon im statischen Fall aus Kapitel 4 durch die Kovarianz von ν bestimmt. Da wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts häufig zwischen Räumen unterschiedlicher Regularität wechseln müssen, ist es sinnvoll einige kurze Notationen einzuführen. Die Räume $H^{n,m}$ behalten dieselbe Bedeutung wie in Abschnitt 4.2. Insbesondere bezieht sich ihre Regularität auf die räumlichen Variablen. Da wir nun jedoch Pfade betrachten, haben wir eine zusätzliche Zeitabhängigkeit. Wir betrachten nun also Räume der Form

$$H^k([t_0,t];H^{n,m}) = H^k([t_0,t]) \otimes H^{n,m}.$$

Die Räume $H^k([t_0,t])$ bezeichnen dabei die Standard-Sobolevräume bzw. ihre Dualräume, falls k negativ ist. Und $\otimes$ ist das gewöhnliche Tensorprodukt von Hilberträumen. Wir schreiben für diesen Pfadraum meist kurz $H^k \otimes H^{n,m}$. $C_{2,2}$ bezeichnet wie in Abschnitt 4.2 den Operator, der das Skalarprodukt auf $H^{2,2}$ erzeugt und $h = (h, Q)$ den Hilbertraum mit Skalarprodukt $Q = \frac{1}{2}\langle \cdot\,, \frac{1}{\omega} \cdot \rangle$. Insbesondere werden im Folgenden auch Räume der Form $H^k([t_0,t]; h) = H^k \otimes h$ eine Rolle spielen. Die Notation $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ bedeutet wie bisher das $L^2(\mathbb{R}^3)$-Skalarprodukt. Die Skalarprodukte über anderen Hilberträumen werden mit Index notiert. Zum Beispiel ist $Q = \langle \cdot\,, \cdot \rangle_h$. Die Paarung von Distributionen mit Testfunktionen werden wir häufig als Integral schreiben. Ist also φ eine Testfunktion aus $L^2(\nu)$ und F eine Pfadraum-Distribution, dann schreiben wir für die Auswertung von F auf φ oft einfach

$$\int \nu(dA)\, F(A)\varphi(A)$$

auch wenn $F(A)$ natürlich nicht punktweise existiert. Außerdem werden wir die Fragen der Eichung und der nichtdynamischen Freiheitsgrade des Photonenfeldes im Folgenden immer ignorieren und nur die Regularität der Räume angeben. Aus unserem Konfigurationsraum V wird also einfach $H^{-2,-2}$. Der folgende Satz liefert uns die korrekte Regularitätsstufe für den Pfadraum.

Satz 1:
Δ^1 stammt auf $L^2([t_0,t]; H^{2,2})$ von einem Spurklasse Operator.

Beweis:
Für $\lambda > 0$ definieren wir den Operator

$$K(\lambda) : L^2[t_0,t] \to L^2[t_0,t], \quad f \mapsto \Big(\frac{1}{2\lambda}\int_{t_0}^{t} d\sigma\, e^{-\lambda|\tau-\sigma|} f_\sigma\Big)_\tau .$$

Damit erhalten wir die Darstellung

$$\Delta^1[J] = \int_{t_0}^{t} d\tau\, \langle J_\tau, (K(\omega)J)_\tau \rangle .$$

Sei nun $(e_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2[t_0,t]$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}^3)$. Dann bilden die Vektoren der Form

$$G_{l,k} = e_l \otimes C_{2,2}^{-\frac{1}{2}} f_k$$

eine Orthonormalbasis von $L^2 \otimes H^{2,2}$. Nun berechnen wir die Spur von Δ^1 in diesem Raum.

$$\begin{aligned}\sum_{l,k} \Delta^1[G_{l,k}] &= \sum_{l,k} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\sigma\, e_l(\tau) e_l(\sigma) \langle C_{2,2}^{-\frac{1}{2}} f_k, K(\omega)(\tau,\sigma) C_{2,2}^{-\frac{1}{2}} f_k \rangle \\ &= \sum_k \langle C_{2,2}^{-\frac{1}{2}} f_k, \operatorname{Tr}_{L^2[t_0,t]} [K(\omega)]\, C_{2,2}^{-\frac{1}{2}} f_k \rangle \\ &= \frac{t-t_0}{2} \sum_k \langle e_k, C_{2,2}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\omega} C_{2,2}^{-\frac{1}{2}} e_k \rangle \\ &= \frac{t-t_0}{2} \operatorname{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left[\frac{1}{\sqrt{\omega}} C_{2,2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right]\end{aligned}$$

Die letzte Spur ist nach den Ergebnissen aus Abschnitt 4.2 endlich und dies beweist die Behauptung. □

Der Satz liefert uns nach dem Satz in Abschnitt 4.1 die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ν auf

$$(L^2 \otimes H^{2,2})' = L^2([t_0,t]; H^{-2,-2})$$

mit Kovarianz Δ^1. Dieses Maß ist unser gesuchtes Referenzmaß. Wir werden nun also einen genügend kleinen Testfunktionenraum in $L^2(\nu)$ suchen, so dass $F_{a,b}$ als Element seines Dualraums interpretiert werden kann. Wir kennen nur die Fouriertransformation

$$\varphi_{a,b}(J) := e^{-\frac{1}{2}\Delta^i[J] + i\langle \eta_{a,b}, J\rangle_{L^2\otimes L^2}} \tag{43}$$

von $F_{a,b}$ und müssen daher die Frage beantworten, was die Fouriertransformation einer Distribution aus $L^2(\nu)$ sein soll und, ob es eine Distribution gibt, dessen Fouriertransformation $\varphi_{a,b}$ ist. Für ein Element Ψ aus $L^2(\nu)$ und ein J aus $L^2 \otimes H^{2,2}$ macht es Sinn die Fouriertransformation

$$\int \nu(dA) \Psi(A) e^{i \int_{t_0}^{t} d\tau \langle J_\tau, A_\tau \rangle}$$

so zu definieren, wie wir es aus dem endlich-dimensionalen gewohnt sind. Ist Ψ eine Distribution, so definieren wir die Fouriertransformation einfach als die Paarung von Ψ mit

$$e^{i\langle J, \cdot\, \rangle_{L^2\otimes L^2}}.$$

Insbesondere muss diese Exponentialfunktion Element des Testfunktionenraums sein. Als nächstes wollen wir einen guten Kandidaten für $F_{a,b}$ finden. Dazu benötigen wir die Fockraum-Darstellung von $L^2(\nu)$. Bezeichne also $\mathcal{H}$ den Abschluss von $L^2 \otimes H^{2,2}$ unter der quadratischen Form Δ^1. Dann ist

$$L^2(L^2([t_0,t]; H^{-2,-2}), \nu) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\tilde{\otimes} n}$$

eine Summe orthogonaler Unterräume und wir werden $F_{a,b}$ in seine Bestandteile $F_{a,b}^{(n)}$, welche auf $\mathcal{H}^{\tilde{\otimes} n}$ wirken, zerlegen, d.h. wir entwickeln die Fouriertransformation $\varphi_{a,b}(J)$ Ordnung für Ordnung in J. Beginnen wir mit der Entwicklung der Exponentialfunktion $\exp[i\langle J, \cdot\rangle_{L^2\otimes L^2}]$. Dabei benutzen wir die Identität

$$e^{\frac{1}{2}t^2+itx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{(it)^n}{n!}$$

und die durch die Fockraum-Darstellung gegebene Identifikation

$$\sqrt{n!}H_n(\langle L, \cdot\rangle_{L^2\otimes L^2}) = L^{\otimes n}$$

für jedes normierte L in $\mathcal{H}$.

$$\begin{aligned}
\exp\left[i\langle J, \cdot\rangle_{L^2\otimes L^2}\right] &= \exp\left[i\|J\|_{\mathcal{H}}\langle \frac{J}{\|J\|_{\mathcal{H}}}, \cdot\rangle_{L^2\otimes L^2}\right] \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|J\|_{\mathcal{H}}^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\|J\|_{\mathcal{H}})^n}{n!}H_n\left(\langle \frac{J}{\|J\|_{\mathcal{H}}}, \cdot\rangle_{L^2\otimes L^2}\right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\Delta^1[J]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\|J\|_{\mathcal{H}})^n}{(n!)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{J}{\|J\|_{\mathcal{H}}}\right)^{\otimes n} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\Delta^1[J]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(n!)^{\frac{3}{2}}}J^{\otimes n}
\end{aligned}$$

Der etwas merkwürdig anmutende Faktor $(n!)^{-\frac{3}{2}}$ stammt von unserer Wahl der Norm in $\mathcal{H}^{\tilde{\otimes} n}$. In unserem Fall ist das Produkt von normierten Vektoren wieder normiert. Multipliziert man die Norm im n-ten Tensorprodukt für jedes n mit $\sqrt{n!}$, so erhält man den vielleicht zu erwartenden Faktor $\frac{1}{n!}$. Setzen wir diese Entwicklung nun in die Definition der Fouriertransformation ein.

$$\begin{aligned}
&\int \nu(dA)F_{a,b}(A)e^{i\langle J,A\rangle_{L^2\otimes L^2}} \\
&= \mu_{a,b}\left[e^{i\langle J,\cdot\rangle_{L^2\otimes L^2}}\right] \\
&= e^{-\frac{1}{2}\Delta^1[J]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(n!)^{\frac{3}{2}}}\mu_{a,b}\left[J^{\otimes n}\right] \\
&= e^{-\frac{1}{2}\Delta^1[J]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(n!)^{\frac{3}{2}}}\mu_{a,b}^{(n)}\left[J^{\otimes n}\right]
\end{aligned} \tag{44}$$

Wobei $\mu_{a,b}^{(n)}$ die Einschränkung von $\mu_{a,b}$ auf den n-ten Tensorfaktor beschreibt. Andererseits lässt sich natürlich auch $\varphi_{a,b}$ Ordnung für Ordnung in J entwickeln. Es ist in der Tat von Formel (43) offensichtlich, dass $\varphi_{a,b}$ sich analytisch auf ganz $(L^2\otimes h)_{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt und sich somit in eine überall konvergente Taylorreihe

$$\varphi_{a,b}(J) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}D_0^n\varphi_{a,b}(J,\ldots,J)$$

entwickeln lässt. $D_0^n \varphi_{a,b}$ ist dabei eine total symmetrische n-Multilinearform und kann somit als lineares Funktional auf dem algebraischen Tensorprodukt $(L^2 \otimes h)^{\otimes_{\mathrm{alg}} n}$ aufgefasst werden. Mit dieser Interpretation erhalten wir für die Fouriertransformation des Pfadmaßes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D_0^n \varphi_{a,b} \left[J^{\otimes n} \right] . \tag{45}$$

Vergleichen wir dies nun mit (44), so lässt sich als Kandidat für die n-te Komponente des Pfadmaßes

$$(-i)^n \sqrt{n!} D_0^n \varphi_{a,b} \tag{46}$$

ausmachen. Einzig der Faktor $e^{-\frac{1}{2}\Delta^1[J]}$ in (44) stört ein wenig. Wir werden daher nicht $\varphi_{a,b}$ sondern

$$\tilde{\varphi}_{a,b}(J) := e^{\frac{1}{2}\Delta^1[J]} \varphi_{a,b}(J)$$

in eine Taylorreihe entwickeln, was natürlich nach wie vor analytisch ist. Wir beginnen also mit der Definition einer Linearform auf dem algebraischen Tensorprodukt $(L^2 \otimes h)^{\otimes_{\mathrm{alg}} n}$.

$$\mu_{a,b}^{(n)} := (-i)^n \sqrt{n!} D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b} \tag{47}$$

Wir wollen nun zeigen, dass diese Linearform ein stetiges Funktional auf einem geeigneten Unterraum von $\mathcal{H}^{\tilde{\otimes} n}$ darstellt. Dafür brauchen wir zunächst einige Aussagen über die Beschränktheit der Ableitungen von $\tilde{\varphi}_{a,b}$.

Lemma 1:
Seien $\rho := e^{\frac{t-t_0}{4}(\|a\|_h^2 + \|b\|_h^2)}$ und $\kappa := 3(t - t_0)$. Dann genügt $\tilde{\varphi}_{a,b}$ den Abschätzungen:

- $|\tilde{\varphi}_{a,b}(J)| \leq \rho\, e^{\kappa \|J\|^2_{L^2 \otimes h}}$
- $|D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}(J_1, \ldots, J_n)| \leq \rho\, (2e\kappa n)^{\frac{n}{2}} \|J_1\|^2_{L^2 \otimes h} \cdots \|J_n\|^2_{L^2 \otimes h}$

Beweis:
Wir beginnen damit, den Exponenten von $\tilde{\varphi}_{a,b}$ abzuschätzen. Zunächst die quadratischen Formen Δ^1 und Δ^i.

$$\begin{aligned}
|\Delta^z[J]| &= \frac{1}{2} \Big| \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\sigma \int dk\, \overline{\hat{J}_\tau(k)} \frac{1}{|k|} e^{-z|k||\tau - \sigma|} \hat{J}_\sigma(k) \Big| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\sigma \int dk\, \frac{1}{|k|} |\hat{J}_\tau(k)| |\hat{J}_\sigma(k)| \\
&\leq \frac{t - t_0}{2} \int_{t_0}^{t} d\tau \int dk\, \frac{1}{|k|} |\hat{J}_\tau(k)|^2 \\
&= (t - t_0) \|J\|^2_{L^2 \otimes h}
\end{aligned}$$

Es bleibt der Term $\langle \eta_{a,b}, J\rangle_{L^2\otimes L^2}$ zu diskutieren.

$$\begin{aligned}
|\langle \eta_{a,b}, J\rangle_{L^2\otimes L^2}| &= \Big| \int_{t_0}^{t} d\tau \langle \frac{1}{2\omega}(e^{-i\omega(t-\tau)}a + e^{-i\omega(2t-t_0-\tau)}b), J_\tau\rangle \Big| \\
&\leq \big\| e^{-i\omega(t-\tau)}a + e^{-i\omega(2t-t_0-\tau)}b \big\|_{L^2(d\tau)\otimes h} \big\| J \big\|_{L^2\otimes h} \\
&\leq (t-t_0)\left(\|a\|_h + \|b\|_h\right)\|J\|_{L^2\otimes h} \\
&\leq \frac{t-t_0}{4}(t-t_0)\left(\|a\|_h^2 + \|b\|_h^2\right) + (t-t_0)\|J\|^2_{L^2\otimes h}
\end{aligned}$$

Damit ist der erste Punkt im Lemma bewiesen. Für den zweiten verwenden wir einen Trick. Erst benutzen wir die Abschätzung für $\tilde{\varphi}_{a,b}$ und die Analytizität, um den homogenen Ausdruck $D_0^n\tilde{\varphi}_{a,b}(J,\ldots,J)$ abzuschätzen. Danach bekommen wir das Resultat mit Hilfe einer Polarisationsidentität. Sei nun also

$$g(\zeta) := \tilde{\varphi}_{a,b}(\zeta J)$$

für ein in $L^2\otimes h$ normiertes J. g lässt sich auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzen. Die Cauchysche Ungleichung liefert daher

$$\left|D_0^n\tilde{\varphi}_{a,b}(J,\ldots,J)\right| = \left|\partial_\zeta^n|_{\zeta=0}\, g(\zeta)\right| \leq \frac{n!}{r^n}\sup_{|\zeta|=r}|g(\zeta)| \leq \rho\,\frac{n!}{r^n}e^{\kappa r^2}.$$

Dies minimieren wir nun über r. Das Minimum wird für $r^2 = \frac{n}{2\kappa}$ angenommen und somit ist

$$|D_0^n\tilde{\varphi}_{a,b}(J,\ldots,J)| \leq \rho\, n!\left(\frac{2e\kappa}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Nun benutzen wir die Polarisationsidentität

$$\begin{aligned}
D_0^n\tilde{\varphi}_{a,b}(J_1,\ldots,J_n) = \frac{1}{n!}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta_1}{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta_n}{2\pi}\, e^{i(\vartheta_1+\cdots+\vartheta_n)}\times \\
D_0^n\tilde{\varphi}_{a,b}(e^{-i\vartheta_1}J_1+\cdots+e^{-i\vartheta_n}J_n,\ldots,e^{-i\vartheta_1}J_1+\cdots+e^{-i\vartheta_n}J_n),
\end{aligned}$$

die wir zunächst beweisen wollen. Die rechte Seite der Identität ergibt sich durch Ausmultiplizieren zu

$$\frac{1}{n!}\sum_{l_1,\ldots,l_n=1}^{n}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta_1}{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta_n}{2\pi}\, e^{i(\vartheta_1+\cdots+\vartheta_n-\vartheta_{l_1}-\cdots-\vartheta_{l_n})}D_0^n\tilde{\varphi}_{a,b}(J_{l_1},\ldots,J_{l_n}).$$

Die Integration mindestens eines Winkels über die Phasenfunktion ergibt Null falls nicht $\{l_1,\ldots,l_n\} = \{1,\ldots,n\}$ ist. Somit beschränkt sich die Summe auf alle Permutationen der Zahlen $1,\ldots,n$. Die Phase im Exponenten verschwindet dann natürlich und die normierten Integrale können ausgeführt werden. Was bleibt ist

$$\frac{1}{n!}\sum_\pi D_0^n\tilde{\varphi}_{a,b}(J_{\pi(1)},\ldots,J_{\pi(n)}) = \frac{1}{n!}\sum_\pi D_0^n\tilde{\varphi}_{a,b}(J_1,\ldots,J_n)$$

und dies zeigt die Identität. Nun verwenden wir dies, um die Auswertung von $D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}$ auf normierten Vektoren

$$\|J_1\|_{L^2 \otimes h} = \cdots = \|J_n\|_{L^2 \otimes h} = 1$$

abzuschätzen. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} &|D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}(J_1, \ldots, J_n)| \\ &\leq \frac{1}{n!} \rho \, n! \left(\frac{2e\kappa}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \left\| e^{-i\vartheta_1} J_1 + \cdots + e^{-i\vartheta_n} J_n \right\|_{L^2 \otimes h}^n \\ &\leq \rho \, (2e\kappa n)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

und haben damit die Aussage des Lemmas bewiesen. □

Das Lemma zeigt, dass $D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}$ eine beschränkte Multilinearform über $L^2 \otimes h$ ist. Da jedoch im unendlich-dimensionalen beschränkte n-fache Multilinearformen nicht mit linearen Funktionalen auf dem Tensorprodukt $(L^2 \otimes h)^{\otimes n}$ übereinstimmen, müssen wir den Raum weiter einschränken.

Lemma 2:
Die Multilinearform $D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}$ lässt sich als beschränktes Funktional auf

$$(H^1([t_0, t]; H^{2,2}))^{\otimes n}$$

auffassen.

Beweis:
Die Wahl der Orthonormalbasis

$$e_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{t - t_0}} e^{2\pi i k \frac{\tau - t_0}{t - t_0}}$$

liefert einen isometrischen Isomorphismus zwischen $L^2[t_0, t]$ und $l^2(\mathbb{Z})$. In dieser Darstellung wird $H^1[t_0, t]$ zu

$$\left\{ (f_k)_k : \sum_k (1 + k^2) |f_k|^2 \right\}$$

Somit ist durch

$$L : e_k \mapsto (1 + k^2)^{-\frac{1}{2}} e_k$$

ein isometrischer Isomorphismus von L^2 nach H^1 gegeben. Wählen wir außerdem eine Orthonormalbasis $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ von $L^2(\mathbb{R}^3)$. Dann ist die Familie von Vektoren der Form

$$G_{k,l} := L^{-1} e_k \otimes C_{2,2}^{-\frac{1}{2}} f_l$$

eine Orthonormalbasis von $H^1 \otimes H^{2,2}$. Wir berechnen die Summe der Quadrate der $L^2 \otimes h$-Normen.

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l} \|G_{k,l}\|^2_{L^2\otimes h} &= \sum_k \|L^{-1} e_k\|^2_{L^2} \sum_l \|C_{2,2}^{-\frac{1}{2}} f_l\|^2_h \\
&= \mathrm{Tr}_{L^2[t_0,t]} \left[L^{-2}\right] \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left[\frac{1}{\sqrt{\omega}} C_{2,2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\omega}}\right] \\
&= \sum_k \frac{1}{1+k^2} \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left[\frac{1}{\sqrt{\omega}} C_{2,2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\omega}}\right] =: K < \infty
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Einbettung von $H^1 \otimes H^{2,2}$ in $L^2 \otimes h$ kompakt, ja sogar Hilbert-Schmidt ist. Sei nun $(J_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $H^1 \otimes H^{2,2}$ und $(r_{l_1,\dots,l_n} : l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N})$ eine endliche Familie reeler Zahlen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\Big| D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}\Big[\sum_{l_1,\dots,l_n} r_{l_1,\dots,l_n} J_{l_1} \otimes \dots \otimes J_{l_n}\Big]\Big| \\
&\le \sum_{l_1,\dots,l_n} \left|r_{l_1,\dots,l_n}\right| \left|D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}\left[J_{l_1} \otimes \dots \otimes J_{l_n}\right]\right| \\
&\le \left(\sum_{l_1,\dots,l_n} \left|r_{l_1,\dots,l_n}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l_1,\dots,l_n} \left|D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}\left[J_{l_1} \otimes \dots \otimes J_{l_n}\right]\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \rho\,(2e\kappa n)^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{l_1,\dots,l_n} \left|r_{l_1,\dots,l_n}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_l \|J_l\|^2_{L^2\otimes h}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&\le \rho\,(2e\kappa K n)^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{l_1,\dots,l_n} \left|r_{l_1,\dots,l_n}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Beschränktheit der Multilinearform $D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}$ benutzt. □

Der Beweis des Lemmas gibt sogar Aufschluss über die Norm von $D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}$ in

$$((H^1 \otimes H^{2,2})^{\otimes n})' = (H^{-1} \otimes H^{-2,-2})^{\otimes n}.$$

Die letzte Rechnung liefert nämlich die obere Schranke

$$\|D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}\|_{(H^{-1}\otimes H^{-2,-2})^{\otimes n}} \le \rho\,(2e\kappa K n)^{\frac{n}{2}}. \tag{48}$$

Wir sind nun bereit, den Raum der Testfunktionen in $L^2(\nu)$ einzuführen. Fixiere dazu ein $R > 2e^2\kappa K$.

$$\mathcal{D} := \left\{\psi \in L^2(\nu) : \left\|\psi\right\|^2_{\mathcal{D}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 R^n \left\|\psi^{(n)}\right\|^2_{(H^1\otimes H^{2,2})^{\otimes n}} < \infty\right\} \tag{49}$$

Die orthogonale Zerlegung $\psi = \sum_n \psi^{(n)}$ bezieht sich dabei wie immer auf die Fockraum-Darstellung von $L^2(\nu)$. Es ist nun ein leichtes den entscheidenden Satz dieses Abschnitts zu beweisen.

Satz:
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{a,b}^{(n)}$ konvergiert im Dualraum $\mathcal{D}'$ des Testfunktionenraums $\mathcal{D}$ und der Limes wird das Pfadmaß $\mu_{a,b} = F_{a,b} d\nu$ des freien Photonenfeldes genannt. Des weiteren ist

$$e^{i\langle J,\,\cdot\,\rangle_{L^2\otimes L^2}} \in \mathcal{D}$$

falls $J \in H^1([t_0,t]; H^{2,2})$ und es gilt

$$\int \nu(dA) F_{a,b}(A) e^{i\int_{t_0}^{t} d\tau \langle J_\tau, A_\tau\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\Delta^i[J] + i\langle \eta_{a,b}, J\rangle_{L^2\otimes L^2}}.$$

Beweis:
Zunächst zeigen wir die Konvergenz der Reihe, berechnen also $\|\mu_{a,b}\|_{\mathcal{D}'}$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 R^n} \|\mu_{a,b}^{(n)}\|^2_{(H^{-1}\otimes H^{-2,-2})^{\otimes n}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! R^n} \|D_0^n \tilde{\varphi}_{a,b}\|^2_{(H^{-1}\otimes H^{-2,-2})^{\otimes n}} \\
&\leq \rho^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \left(\frac{2e\kappa K}{R}\right)^n \\
&\leq \rho^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \left(\frac{2e^2\kappa K}{R}\right)^n
\end{aligned}$$

Mit der Stirling-Formel und weil $R > 2e^2\kappa K$ gewählt wurde, ist dies endlich. Nun verwenden wir die Entwicklung

$$e^{i\langle J,\,\cdot\,\rangle_{L^2\otimes L^2}} = e^{-\frac{1}{2}\Delta^1[J]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n!)^{\frac{3}{2}}} J^{\otimes n}$$

und zeigen, dass dies in $\mathcal{D}$ konvergiert.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 R^n \left\| \frac{i^n}{(n!)^{\frac{3}{2}}} J^{\otimes n} \right\|^2_{(H^1\otimes H^{2,2})^{\otimes n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 \frac{1}{n!} \left(R\|J\|^2_{H^1\otimes H^{2,2}}\right)^n < \infty$$

Nun müssen wir nur noch $\mu_{a,b}$ auf diesem Vektor auswerten.

$$\begin{aligned}
\mu_{a,b}\big[e^{i\langle J,\,\cdot\,\rangle_{L^2\otimes L^2}}\big] &= e^{-\frac{1}{2}\Delta^1[J]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(n!)^{\frac{3}{2}}}\mu_{a,b}\big[J^{\otimes n}\big] \\
&= e^{-\frac{1}{2}\Delta^1[J]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(n!)^{\frac{3}{2}}}(-i)^n\sqrt{n!}\,D_0^n\tilde{\varphi}_{a,b}\big[J^{\otimes n}\big] \\
&= e^{-\frac{1}{2}\Delta^1[J]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}D_0^n\tilde{\varphi}_{a,b}\big[J^{\otimes n}\big] \\
&= e^{-\frac{1}{2}\Delta^1[J]}\tilde{\varphi}_{a,b}(J) \\
&= \varphi_{a,b}(J)
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\varphi_{a,b}$ tatsächlich die Fouriertransformation von $\mu_{a,b}$ ist. □

Nachdem wir nun eine befriedigende Beschreibung des Pfadintegrals haben, wollen wir im folgenden Abschnitt kurz erläutern, wie man die gewonnenen Erkenntnisse nutzen kann, um Ideen für Spielzeug-Modelle zu erhalten, die die Wechselwirkung des Photonenfeldes mit Materie beschreiben.

10.4 Das Pfadintegral in wechselwirkenden Theorien

Neben der intuitiven Beschreibung, die das Pfadintegral für die Quantenmechanik des Photonenfeldes liefert, kann dieses auch dazu genutzt werden, auf sehr einfache Weise Wechselwirkungen mit Materie zu beschreiben. Natürlich wird es uns nicht direkt gelingen, ein reales Materiemodell an das zweitquantisierte elektromagnetische Feld zu koppeln. Dennoch lässt sich das heuristische Prinzip einfach erläutern. Ein wichtiger Grund für das Scheitern dieser Ideen in der QED ist in der Irregularität der Felder und Ströme zu suchen, die zu Divergenzen führt. Wir kennen dieses Problem bereits aus der klassischen Elektrodynamik, wo es nicht gelingt, die Maxwell-Gleichungen mit der Bewegungsgleichung für Materie, also die Lorentzkraft, zu koppeln, weil dies die Auswertung des Feldes an der singulären Stelle des Teilchenortes erfordern würde. Die nichtrelativistische QED, die für die Beschreibung sehr vieler Phänomene ausreichend ist, benutzt ein vergleichsweise einfaches Materiemodell. Die Elektronen werden dabei nicht voll relativistisch behandelt. Insbesondere ist die Teilchenzahl erhalten und der antisymmetrisierte Tensorproduktraum

$$\mathcal{F}_{e^-} = L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)^{\wedge N}$$

reicht zur Beschreibung aus. Der heuristische Hamiltonian für diese Theorie operiert also auf dem Tensorprodukt $\mathcal{F}_{e^-}\otimes\mathcal{F}_\gamma$ und hat die Form

$$H = H_{e^-} + H_\gamma.$$

Dabei ist $\mathcal{F}_\gamma$ unser Fockraum $L^2(H^{-2,-2},P)$ und H_γ der Halmiltonian des freien Photonenfeldes, der nur auf dem zweiten Tensorfaktor wirkt. H_{e^-} hingegen enthält die Wechselwirkung und ist gegeben durch

$$H_{e^-} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2m_{e^-}} \left(\sigma_k \cdot (-i\nabla_k + q_{e^-} A(x_k))\right)^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_{k<l} \frac{q_{e^-}^2}{|x_k - x_l|}.$$

Der zweite Term, die Coulomb-Wechselwirkung, wirkt nur auf den Materieraum und ist für uns nicht relevant. Der kritische Ausdruck hier ist der heuristische Operator $A(x_k)$. Dieser modelliert die Wechselwirkung, indem er auf beide Tensorfaktoren wirkt. In unserem Schrödingerbild ist die Wirkung von $A(x_k)$ leicht beschrieben.

$$A(x_k)\left(\varphi_1(y_1) \wedge \cdots \wedge \varphi_1(y_N) \otimes \Psi(B)\right) = B(y_k)\left(\varphi_1(y_1) \wedge \cdots \wedge \varphi_1(y_N) \otimes \Psi(B)\right)$$

Die Wirkung ist also eine Auswertung des Punktes B in $H^{-2,-2}$ auf y_k. In unser bisherigen Notation könnten wir auch $\langle \delta_{x_k}, A\rangle$ schreiben. Und hier sehen wir auch schon das Problem: A lässt sich nur auf glatten Funktionen auswerten und δ_{x_k} gehört sicher nicht dazu. Ein Weg die ungelösten Schwierigkeiten bei der Definition des QED-Hamiltonians zu umgehen, wäre direkt die Dynamik des Gesamtsystems anzugeben. Dies gelingt zumindest heuristisch mit Hilfe des Pfadintegrals. Da über feste Pfade von A-Feldkonfigurationen integriert wird, lässt sich zunächst die Materiegleichung

$$i\partial_t \psi_{e^-} = H_{e^-}(A)\, \psi_{e^-} \tag{50}$$

für gegebenes zeitabhängiges A-Feld lösen. Dies liefert eine unitäre Dynamik $U^{e^-}_{t_0,t}(A)$, die von A abhängt. Nun müssen wir nur noch über alle möglichen Pfade mit dem Pfadmaß des Photonenfeldes integrieren.

$$\int \mu(dA) U^{e^-}_{t_0,t}(A)$$

Da wir die Regularität des Pfadintegrals μ bestimmt haben, wissen wir, dass diese Idee nur dann umsetzbar ist, wenn zumindest die Matrixelemente von $U^{e^-}_{t_0,t}(A)$ im Argument A stetig in $H^{-1}([t_0,t]; H^{-2,-2})$ sind. Tatsächlich lässt sich aber nicht einmal die Materiegleichung (50) für derart irreguläres A lösen. Gehen wir nun zu dem anderen Extrem, einem Modell, das wir schon besprochen haben. Angenommen unser Materiemodell ist trivial, also $\mathcal{F}_{e^-} = \mathbb{C}$ der einfachste komplexe Hilbertraum. Nehmen wir weiter an, dass $U^{e^-}_{t_0,t}(A)$ die einfache Form

$$e^{i\int_{t_0}^t d\tau \langle J_\tau, A_\tau\rangle}$$

für ein festes glattes J hat. Dann erhalten wir als Gesamtdynamik die Fouriertransformation des Pfadmaßes. Natürlich ist dies kein ernstzunehmendes Modell. Dennoch illustriert es die Idee, die hinter der Konstruktion wechselwirkender Modelle steckt. Leider ist Stetigkeit des externen Feldproblems in $H^{-1}([t_0,t]; H^{-2,-2})$ eine sehr strikte Bedingung, die von realistischen Modellen kaum erfüllt sein wird. Es werden also grundlegend neue Ideen nötig sein, um die beiden äußeren Quellen-Probleme der Materie und des Photonenfeldes zu einer wahrhaft wechselwirkenden Theorie zu vereinigen, die auf einem soliden mathematischen Fundament seht.

A Appendix

A.1 Standard Harmonischer Quantenoszillator

Die Dynamik des klassischen Harmonischen Oszillators in n Dimensionen wird durch die Hamiltonfunktion

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x,p) \mapsto \frac{1}{2\mu}\, p \cdot p + \frac{1}{2}\mu\, \nu^2\, x \cdot x$$

bestimmt, wobei $\mu > 0$ die Masse und $\nu > 0$ die Kreisfrequenz ist. Wir können den Phasenraum durch

$$\xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n, (x,p) \mapsto \sqrt{\frac{\nu}{2}}(\sqrt{\mu\nu}x + \frac{i}{\sqrt{\mu\nu}}p)$$

mit $\mathbb{C}^n$ identifizieren. Die Zeitentwicklung wird somit unitär und beschrieben durch

$$\xi(x_t, p_t) = e^{-i\nu t}\xi(x_0, p_0).$$

Wir erhalten durch kanonische Quantisierung den Hamiltonoperator des Quantenoszillators

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2\mu}\triangle + \frac{1}{2}\mu\nu^2\, x \cdot x = \nu \sum_{k=1}^{n}(a_k^* a_k + \frac{1}{2}), \quad \text{wobei} \quad a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\mu\nu}x_k + \frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}\partial_k)$$

die Vernichtungsoperatoren sind. $\mathcal{H}$ besitzt ein diskretes Spektrum und eine L^2-Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Zu den Eigenwerten

$$E_{m_1,\ldots,m_n} = \nu \sum_{k=1}^{n}(m_k + \frac{1}{2}) \quad \text{mit} \quad m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}_0$$

gehören die normierten Eigenfunktionen

$$\psi_{m_1,\ldots,m_n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{m_k!}}(a_k^*)^{m_k}\psi_{GZ}, \quad \text{wobei} \quad \psi_{GZ} = \left(\frac{\mu\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} \exp(-\frac{\mu\nu}{2}\, x \cdot x)$$

der Grundzustand ist.

A.2 Isomorphismus zwischen bosonischem Fockraum und L²-Funktionen

Den Inhalt der folgenden beiden Abschnitte entnimmt man am besten der Monographie von David Nualart.[22] Sei W ein reeller separabler Hilbertraum und Q eine von einem Spurklasseoperator stammende quadratische Form auf W, sowie h der Abschluss von W bezüglich Q. Sei weiter P ein Wahrscheinlichkeitsmaß

[22] siehe [4]

auf $(W', \mathcal{B}(W'))$, so dass die Auswertungsfunktionale $(\langle w, \cdot \rangle : w \in W)$ auf Elementen aus W' eine zentrierte Gaußsche Familie mit Kovarianz Q bilden, d.h. für $w_1, \ldots, w_k \in W$ ist $(w_1, \ldots, w_k)$ k-dimensional normalverteilt mit Kovarianzmatrix $(Q(w_j, w_l))_{j,l=1}^k$. Wir sehen sofort, dass sich die lineare Isometrie

$$(W, Q) \ni w \mapsto \langle w, \cdot \rangle \in L^2(W', P)$$

auf den ganzen Raum h isometrisch fortsetzen lässt. Wir wollen einen kanonischen Isomorphismus zwischen

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} h^{\tilde{\otimes} n} \qquad \text{und} \qquad L^2(W', \mathcal{B}(W'), P)$$

finden. Hierbei bezeichnet $h^{\tilde{\otimes} n}$ jenen Unterraum des Tensorproduktes $h^{\otimes n}$, der unter Permutation der Tensorfaktoren invariant ist. Wir führen zunächst die Hermitepolynome

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \partial_x^n e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

ein. Diese haben folgende Eigenschaften:

- $\partial_x H_n = H_{n-1}$
- $(n+1) H_{n+1} = x H_n - H_{n-1}$
- $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

Wir betrachten nun den Unterraum

$$\mathcal{H}_n := \overline{\operatorname{span}} \{ H_n(\langle w, \cdot \rangle) : w \in W, Q[w] = 1 \}$$

von $L^2(W', P)$, den wir das n-te Wienerchaos nennen. Beachte dabei, dass wir auch $w \in h$ hätten fordern können, da die Q-Einheitskugel aus W in der aus h dicht liegt und aus der Konvergenz der Auswertungsfunktionale auch die Konvergenz der Einsetzung in ein Polynom folgt. Dann zerfällt unser L^2-Raum in die orthogonale Summe

$$L^2(W', P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Wir können uns also darauf beschränken, einen Isomorphismus $F_n : h^{\tilde{\otimes} n} \to \mathcal{H}_n$ anzugeben. Um eine einfache Notation für diesen Isomorphismus zu erhalten, führen wir Auf- und Absteigeoperatoren ein. Für eine Q-Orthonormalbasis $(e_k)_{k \in K}$ in W bezeichne dafür $a_{n,k}$ die Einschränkung des beschränkten Operators

$$\tilde{a}_{n,k} : h^{\otimes n} \to h^{\otimes n-1}, p_1 \otimes \cdots \otimes p_n \mapsto \sqrt{n}\, Q(e_k, p_1)\, p_2 \otimes \cdots \otimes p_n$$

auf $h^{\tilde{\otimes} n}$. Man sieht leicht, dass $a_{n,k}$ Werte im symmetrisierten Tensorprodukt annimmt. Auf Vektoren

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Psi_n \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} h^{\tilde{\otimes} n} \qquad \text{mit} \qquad \Psi_n = 0 \quad \text{für fast alle} \quad n$$

lässt sich der Operator

$$a_k := \bigoplus_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$$

definieren. Der Definitionsbereich seines Adjungierten a_k^* enthält ebenfalls alle Vektoren dieser Form. Mit der Notation

$$1 = |0\rangle \in \mathbb{R} = h^{\tilde{\otimes} 0}$$

und der Erkenntnis, dass

$$(\Psi_\alpha := \prod_{k \in K} \frac{1}{\sqrt{\alpha_k!}} (a_k^*)^{\alpha_k} |0\rangle : |\alpha| = n)$$

eine Orthonormalbasis von $h^{\tilde{\otimes} n}$ und

$$(\Phi_\alpha := \prod_{k \in K} \sqrt{\alpha_k!} H_{\alpha_k}(\langle e_k, \cdot \rangle) : |\alpha| = n)$$

eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_n$ ist, wenn α einen Multiindex bezeichnet, lässt sich sofort $F_n(\Psi_\alpha) := \Phi_\alpha$ definieren.

A.3 Malliavin-Ableitung und Divergenzoperator

Seien W, Q, h und P wie im vorherigen Abschnitt. Wir wollen genügend glatte Funktionen aus $L^2(W', P)$ ableiten, d.h. wir suchen nach einem Analogen des Gradienten im unendlichdimensionalen Fall. Die Malliavin-Ableitung ist als Richtungsableitung hervorragend geeignet. Wir wollen eine Zufallsvariable $\Psi \in L^2(W', P)$ glatt nennen, wenn es $w_1, \ldots, w_n \in h$ und $f \in C^\infty$ gibt, so dass

$$\Psi = f(\langle w_1, \cdot \rangle, \ldots \langle w_n, \cdot \rangle)$$

und f und alle partiellen Ableitungen von f höchstens polynomiell wachsen. Dafür schreiben wir auch $f \in C_p^\infty$ Für eine solche glatte Zufallsvariable Ψ wird dann die Malliavin-Ableitung

$$D\Psi = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\langle w_1, \cdot \rangle, \ldots \langle w_n, \cdot \rangle) w_k \in L^2(W', P) \otimes h$$

definiert. Die Malliavin-Ableitung hat folgende Eigenschaften:

- D ist abschließbar von $L^2(W', P)$ nach $L^2(W', P) \otimes h$.

- Sind Ψ und Φ glatte Zufallsvariablen und $w \in h$, so gilt

$$E[\Psi\, Q(D\Phi, w)] + E[\Phi\, Q(D\Psi, w)] = E[\Psi\, \Phi\langle w, \cdot\rangle]$$

- Ist $\Psi = f(\langle w_1, \cdot\rangle, \dots \langle w_n, \cdot\rangle)$ eine glatte Zufallsvariable, für die außerdem $w_1, \dots, w_n \in W$ sind und $x \in W'$, so gilt

$$D\Psi(\cdot + x) = (D\Psi)(\cdot + x).$$

Wir bezeichnen auch den Abschluss des oben definierten Operators mit D. Der Definitionsbereich dieses Operators wird mit $\mathbb{D}^{1,2}$ bezeichnet und ist mit dem von D erzeugten Skalarprodukt ein Hilbertraum. Sei nun δ das Adjungierte von D. Dann liegt $\mathbb{D}^{1,2} \otimes h$ im Definitionsbereich von δ und für alle $\Psi \in \mathbb{D}^{1,2}$ und $\chi \in \mathbb{D}^{1,2} \otimes h$ die definierende Gleichung

$$E[\Psi\delta(\chi)] = E[Q(D\Psi, \chi)].$$

δ heißt Divergenzoperator und hat des weiteren die Eigenschaft:

- Ist $w \in h$ und $\Psi \in \mathbb{D}^{1,2}$, so ist $\delta(w\Psi) = \Psi\langle w, \cdot\rangle - Q(w, D\Psi)$.

A.4 Bochner-Minlos-Theorem

Das Bochner-Minlos-Theorem[23] liefert eine Charakterisierung positiv definiter stetiger Funktionale auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}$ als Fouriertransformationen von Borelmaßen auf den temperierten Distributionen $\mathcal{S}'$. Insbesondere erhält man durch diesen Satz bei vorgegebenem normiertem Funktional ein zugehöriges Wahrscheinlichkeitsmaß. Die konkrete Formulierung benutzt folgende drei Eigenschaften, welche ein Funktional F auf $\mathcal{S}$ erfüllen kann:

- Stetigkeit: F ist bezüglich der Topologie auf $\mathcal{S}$ stetig.
- Positive Definitheit: Für $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{S}$ und $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z_k} F(p_j - p_k) \geq 0.$$

- Normiertheit: $F(0) = 1$

Der Satz besagt nun, dass F genau dann die obigen drei Eigenschaften hat, wenn

$$F = \int e^{i\langle p, \cdot\rangle} P(dp)$$

für ein reguläres Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'))$.

[23] [6]

A.5 Brownsche Bewegung und Stochastische Integration

Der stochastische Prozess $(B_\tau)_{\tau\in\mathbb{R}_0^+}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Theta, \Sigma, \mathbb{P})$ steht in dieser Arbeit stets für eine standard Brownsche Bewegung, d.h. für einen zeithomogenen Prozess mit unabhängigen Inkrementen und B_1 verteilt wie $\mathcal{N}(0,1)$. Nach dem Kolmogorovschen Kreterium verfügt dieser Prozess über eine stetige Modifikation und wir arbeiten immer mit dieser Version. Es ist für viele Rechnungen vorteilhaft zu bemerken, dass sich die Brownsche Bewegung auf $[0,T]$ in zwei unabhängige Komponenten zerlegen lässt.

$$B_T \qquad \text{ist unabhängig von der Brownschen Brücke} \qquad (B_\tau - \frac{\tau}{T}B_\tau)_{\tau\in[0,T]}.$$

Wir wollen nun an die Grundbegriffe der stochastischen Integration erinnern. Für eine genaue Behandlung siehe [20]. Zunächst wird für beschränkte einfache adaptierte Prozesse das stochastische Integral über die Brownsche Bewegung definiert:

$$\int_0^\tau \sum_{j=0}^{n-1} U_j \mathbb{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(\sigma) dB_\sigma := \sum_{j=0}^{n-1} U_j (B_{t_{j+1\wedge\tau}} - B_{t_{j\wedge\tau}})$$

Diese Definition wird zunächst auf alle progressiv messbaren $L^2(d\tau\otimes\mathbb{P})$-Prozesse isometrisch in die stetigen in Null startenden $L^2(\mathbb{P})$-Matingale $\mathbb{H}_C^2$ mit dem Skalarprodukt $\langle M,N\rangle_{\mathbb{H}_C^2} := E[M_T N_T]$ fortgesetzt. Danach wird das stochastische Integral für alle Prozesse aus

$$\Lambda := \{u_\tau : \text{progressiv und} \quad \int_0^T u_\tau^2 d\tau < \infty \quad \text{f.s.}\}$$

definiert. Dazu wird die folgende Aussage verwendet:

- Für $u \in \Lambda$ gibt es genau ein in Null startendes stetiges lokales L^2-Martingal M, so dass für jede Stoppzeit ν mit $E[\int_0^\nu u_\tau^2 d\tau] < \infty$ gilt

  $$M_{\tau\wedge\nu} = \int_0^\tau u_\sigma \mathbb{1}_{[0,\nu]}(\sigma) dB_\sigma$$

  und für den endlichen Variationsprozess zu M^2

  $$\langle M\rangle_\tau = \int_0^\tau u_\sigma^2 d\sigma.$$

Über endliche Variationsprozesse, d.h. adaptierte càdlàg Prozesse mit pfadweise endlicher Variation, lässt sich das Integral pfadweise definieren. Wir können somit über jeden Itô-Prozess der Form

$$X_\tau = X_0 + \int_0^\tau u_\sigma dB_\sigma + \int_0^\tau g_\sigma d\sigma$$

integrieren, wobei $u \in \Lambda$, X_0 zum Zeitpunkt Null messbar und g progressiv sowie f.s. in $L^1(d\tau)$ sein soll. Wir schreiben auch

$$dX_\tau = u_\tau dB_\tau + g_\tau d\tau.$$

Die fundamentale Aussage, die wir für die Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe stochastischer Methoden benötigen, ist

- **Itô-Formel:** Für einen vektorwertigen Itô-Prozess $X_\tau = (X_\tau^1, \ldots, X_\tau^n)$ und f zweimal stetig differenzierbar ist auch $f(X_\tau)$ ein Itô-Prozess und es gilt

$$df(X_\tau) = \nabla f(X_\tau) \cdot dX_\tau + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n} \partial_k \partial_j f(X_\tau) dX_\tau^k dX_\tau^j,$$

wobei

$$4\, dX_\tau^k dX_\tau^j := d\left(\langle X^k + X^j \rangle_\tau - (\langle X^k - X^j \rangle_\tau\right).$$

A.6 Kovariante Formulierung für verschwindenden externen Strom

Im Falle des freien Photonenfeldes gestalten sich die Zweitquantisierung und die Angabe der freien Quantendynamik besonders einfach. Hier lässt sich auch die explizite Lorentzkovarianz erhalten. Der Zustandsraum der quantenmechanischen Dynamik ist schlicht der klassische bosonische Fockraum $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\tilde{\otimes} n}$ über dem 1-Photon-Raum H, der dem Lösungsraum der klassischen A-Feldgleichung modulo deren Eichfreiheiten entspricht. Um Kausalität sicherzustellen, soll der Träger der fouriertransformierten Lösungen nur im Vorwärtslichtkegel

$$K := \{k = (k^0, \vec{k}) \in \mathbb{R}^4 : g(k,k) = 0, k^0 > 0\}$$

liegen. Dabei bezeichnet g die Minkowskimetrik und der Lichtkegel ist mit dem bis auf eine Konstante eindeutigen Lorentzinvarianten regulären Borelmaß $d\mu$ auf K ausgestattet. Ist $j : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, (k^0, \vec{k}) \mapsto \vec{k}$ die Projektion auf den Impulsraum bei festgehaltener Zeit, so hat μ die Darstellung

$$\mu(C) := \int_{j[C]} \frac{d\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

für jede Borelmenge C. Wir arbeiten in der Lorentzeichung und damit bestehen die restlichen Eichfreiheiten in allen Viererdivergenzen. Wir definieren zunächst den Raum der glatten Lösungen im Fourierraum:

$$\tilde{H} := \frac{\{A \in C_0^\infty(K; \mathbb{C}^4) : g(k, A(k)) = 0 \; \forall k \in K\}}{\{k\Lambda : \Lambda \in C_0^\infty(H; \mathbb{C})\}}$$

Nun ist das natürliche Skalarprodukt

$$\langle [A], [B] \rangle := \int_K g(A,B) d\mu$$

wohldefiniert, d.h. vom Repräsentanten unabhängig. Die positive Definitheit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sieht man z.B. durch Wahl des Repräsentanten in Strahlungseichung, d.h. mit $A^0 = 0$. Der Abschluss von $\tilde{H}$ unter diesem Skalarprodukt ist nun der Einteilchenraum H. Da dies der klassische Lösungsraum ist, wird die freie unitäre Dynamik einfach durch den Forwärtstransport in der Zeit gegeben.

$$U_t : H \to H, [A] \mapsto [e^{itk^0} A]$$

A.7 Transformation aus der Bogolubov-Theorie

Die Idee der Bogolubov-Approximation erfordert einen Hamiltonian auf $\bigoplus_{n=0}^{\infty} h^{\tilde{\otimes} n}$ unitär zu transformieren. Diese Transformation U_Φ soll die Eigenschaft

$$\forall p \in h : U_\Phi^* \, a^*(p) \, U_\Phi = a^*(p) + \langle \Phi, p\rangle$$

haben, wobei $\Phi \in h$ ein fester Vektor des 1-Boson-Raumes ist und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt auf h. Wir zeigen hier, dass $U_\Phi = \exp(a^*(\Phi) - a(\Phi))$ eine solche Transformation liefert. Dieser Operator ist durch die entsprechende Potenzreihe auf

$$\bigcup_{M\in\mathbb{N}} \{\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Psi_n \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} h^{\tilde{\otimes} n} : \Psi_n = 0 \quad \text{für alle} \quad n \geq M\} =: \bigcup_{M\in\mathbb{N}} \mathcal{F}^M$$

definiert. Diese konvergiert, da die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eingeschränkt auf $\mathcal{F}^M$ in Norm durch $\sqrt{M+1}\,\|\Phi\|$ beschränkt sind. Außerdem ist U_Φ unitär, da $(a^*(\Phi) - a(\Phi))^* = -(a^*(\Phi) - a(\Phi))$ ist. Kommen wir also zu der gewünschten Eigenschaft. Für $\Phi = 0$ ist nichts zu zeigen und für $\Phi \neq 0$ definieren wir $\|\Phi\|\, e_1 := \Phi$ und setzen zu einer Orthonormalbasis $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ von h fort. Es reicht nun

$$U_\Phi^* \, a^*(e_k) \, U_\Phi = a^*(e_k) + \|\Phi\| \delta_{k\,1}$$

zu zeigen. Für $k \neq 1$ ist dies klar und für $k = 1$ folgt es mit

- $U_\Phi^* \, (a^*(e_1) - a(e_1)) \, U_\Phi = a^*(e_1) - a(e_1)$
- $U_\Phi^* \, (a^*(e_1) + a(e_1)) \, U_\Phi = e^{-\|\Phi\|(a^*(e_1)-a(e_1))}(a^*(e_1) + a(e_1)) e^{\|\Phi\|(a^*(e_1)-a(e_1))} \underset{(\star)}{=} a^*(e_1) + a(e_1) + 2\|\Phi\|,$

wobei wir in $(\star)$ z.B. die Darstellung

$$a^*(e_1) + a(e_1) = i\sqrt{2}\partial_x \qquad \text{und} \qquad a^*(e_1) - a(e_1) = -i\sqrt{2}x$$

der Kommutatoralgebra verwenden.

B Symbole

const	generische Konstante
Y'	Dualraum von Y
Q, m	Quadratische Formen definiert wie in den Abschnitten 2.1 oder 4.5
P	Wahrscheinlichkeitsmaß definiert wie in dem Abschnitt 2.3 oder 4.1
$\tilde{P}$	Wahrscheinlichkeitsmaß definiert wie in dem Abschnitt **??**
∇f	Gradient von f
$\nabla \cdot X$	Divergenz von X
$\nabla \times X$	Rotation von X
$\triangle f$	$\sum_{k=1}^{d} \partial_k^2 f$
$C_0^\infty(U;Y)$	Beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger in U und Werten in Y
$L_Y^2(\Theta, \mu)$	Quadratintegrierbare Funktionen über (Θ, μ) mit dessen σ-Algebra und Werten in Y
$\langle p, \cdot \rangle$	Auswertungsfunktional auf p
$Y^{\tilde{\otimes} n}$	Unter Permutation der Faktoren invarianter Unterraum von $Y^{\otimes n}$
$E[f] = E_P[f]$	$\int f dP$
$D\Psi$	Malliavin-Ableitung von Ψ
$D_b\Psi$	$Q(b, D\Psi)$
δu	Divergenzoperator angewandt auf u
$\mathrm{Tr}[C]$	Spur von C
$\mathcal{F}g = \hat{g} = \check{g}(-\cdot)$	Fouriertransformation von g
$\hat{C}$	$\mathcal{F}^{-1} C \mathcal{F}$
$\mathcal{B}(Y)$	Borelsche σ-Algebra auf Y
$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert a und Varianz σ^2
$(H^{m,n}, g_{m,n})$	Sobolevraum aus Abschnitt 4.2
$C_{m,n}$	Operator wie in Abschnitt 4.2 definiert
$\lvert p \rvert_m$	$\left(\sum_{k=1}^{d} p^m \right)^{\frac{1}{m}}$
δ_a	Dirac-Maß in a
$\partial^\alpha f$	$\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} f$ für Multiindex α
$\alpha!$	$\prod_{k=1}^{d} \alpha_k!$ für Multiindex α
$\binom{\alpha}{\beta}$	$\prod_{k=1}^{d} \frac{\alpha_k!}{(\alpha_k - \beta_k)!\,\beta_k!}$ für Multiindices α,β
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3; Y)$	Schwartzfunktionenraum mit Werten in Y
$f \star g$	Faltung von f mit g bzw. in Kapitel **??** das Sternprodukt von f und g
$[X]$	Äquivalenzklasse von X
$\bar{X}$	Komplex Konjugiertes zu X

B_τ	Brownsche Bewegung
$\mathbb{1}_C$	Indikatorfunktion zur Menge C
d	Äußere Ableitung bzw. in Abschnitt 5.1 stochastisches Differential
$U_{t,T}$	Unitäre Photonenfelddynamik mit externem Strom
$U^0_{t,T}$	Unitäre Photonenfelddynamik ohne externen Strom
$U^I_{t,T}$	Unitäre Photonenfelddynamik im Wechselwirkungsbild
$s(\tau)$,$c(\tau)$	Abkürzung für $\sin(\omega\tau)$,$\cos(\omega\tau)$
$\int_\tau f(\tau) = \int_{\sigma\in[t,T]} f(\tau)$	Abkürzung für $\int_t^T d\tau\, f(\tau) J_\tau$
χ_t^T	Ausdruck wie in Abschnitt 7.2 definiert
$B_R(a)$	Offene Kugel mit Radius R um a
$B_R(0) = B_R$	Offene Kugel mit Radius R um 0
$Y_\mathbb{C}$	Komplexifizierung von Y
$\mathbb{D}_k^{1,2}$	Funktionenraum definiert wie in Abschnitt 7.6
$\mathbb{D}^{1,2}$	$\mathbb{D}_0^{1,2}$
T_A	Translation um A
$\Re$,$\Im$	Realteil, Imaginärteil
$\bar{Q}$	Sesquilineare Version der Bilinearform Q
μ^z	Pfadmaß
B^z	der Differenzialoperator $\frac{1}{z}(-\partial_\tau^2 + z^2\omega^2)$
A^z	Inveres von B^z
Δ^z	Quadratische Form zu A^z
η^z	Vektor wie definiert in Abschnitt 10.2
φ	Fouriertransformation des Pfadmaßes
ν	Pfadmaß des Ohrnstein-Uhlembeck-Prozesses
$\mathcal{H}$	Hilbertraum mit Skalarprodukt Δ^1

C Referenzen

[1] „The Stability of Matter in Quantum Mechanics" by Elliott H. Lieb, Princeton University, Kapitel 2

[2] „A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms" by Strichartz, CRC Press, 6.3

[3] „Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications" by Øksendal, Springer, Kapitel 8

[4] „The Malliavin Calculus and Related Topics" by Nualart, Springer, Lemma 1.1.2

[5] „The Malliavin Calculus and Related Topics" by Nualart, Springer, Proposition 1.1.1, Proposition 1.2.1

[6] „Quantum Physics: A Functional Integral Point of View" by James Glimm & Arthur Jaffe, Springer, A.6

[7] "Finite Quantum Electrodynamics" by Scharf, Springer

[8] "Bag Formation in an Effective Yang-Mills Theory" by Hilf and Polley, Abschnitt 2

[9] "Quantum Mechanics in Phase Space" by Zachos, Fairlie and Curtright, World Scientific Series in 20th Century Physics Vol.34

[10] "On Quantum Mechanical Phase-Space Wave Functions" by Wlodarz

[11] "Time Evolution of the External Field Problem in QED" by Deckert, Dürr, Merkl and Schottenloher

[12] "The Causal Phase in Quantum Electrodynamics" by Scharf and Wreszinski

[13] "Improved predictions for g-2 of the muon and $\alpha_{QED}(M_Z^2)$" by Hagiwara, Martin, Nomura and Teubner

[14] "Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantenmechanik nach Dirac" by Klein and Nishina

[15] "Dynamics of Charged Particles in their Radiation Field" by Spohn

[16] "Vaccum Polarization and the Geometric Phase: Gauge Invariance" by Mickelsson, J. Math. Phys. 39(2): 831-837, 1998

[17] "The Stability of Matter: From Atoms to Stars" by Lieb,Part III

[18] "Applications of the Weyl-Wigner Formalism to Noncommutative Geometry" by Zampini

[19] "The Dirac Equation" by Thaller, Springer, Abschnitt 10.3.3

[20] "Brownian Motion and Stochastic Calculus" by Karatzas and Shreve, Springer

[21] "Stochastic Equations in Infinite Dimensions" by Da Prato and Zabczyk, Chapter 10

[22] "Particle Interpretation for External Field Problems in QED" by Fierz and Scharf, Helv. Phys. Acta. 52(4): 437-453 (1980), 1979

[23] "Generalized Functionals in Gaussian Spaces" by Kondratiev, Leukert, Potthoff, Streit and Westerkamp, J. Func. Analysis 141 No 2 (1996)