

# BACHELORARBEIT

eingereicht an der  
Fakultät für Physik  
der  
Ludwig–Maximilians–Universität München

---

## ADIABATISCHE PAARERZEUGUNG ADIABATIC PAIR CREATION

---

Franziska Beck

Betreuer:

Prof. Dr. Detlef Dürr  
Prof. Dr. Erwin Frey

29. Mai 2013

# ADIABATISCHE PAARERZEUGUNG

Franziska Beck

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Eigenschaften des Dirac-Operators . . . . .	1
1.2	Kopplung an ein externes Feld . . . . .	4
1.3	Die Löcher-Theorie und der Dirac-See . . . . .	5
1.4	Zweite Quantisierung der Dirac-Gleichung und Streutheorie . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Paarerzeugung – Zeitunabhängige Probleme</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Adiabatische Paarerzeugung</b>	<b>12</b>
3.1	Heuristische Darstellung der adiabatischen Paarerzeugung . . . . .	12
3.2	Mathematische Formulierung der adiabatischen Paarerzeugung . . . . .	16
3.3	Zeitentwicklung der Wellenfunktion . . . . .	18
3.3.1	Zeitentwicklung für $s \leq 0$ . . . . .	18
3.3.2	Verallgemeinerte Eigenfunktionen . . . . .	20
3.3.3	Zeitentwicklung für $s > 0$ . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Ausblick: Experimentelle Realisierung</b>	<b>29</b>
4.1	Schwerionenstöße . . . . .	30
4.2	Paarerzeugung in Laserfeldern? . . . . .	31
4.3	Kombination von Laser- und Coulomb-Feld . . . . .	33
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>35</b>
A.1	Paarerzeugung in einem konstanten elektrischen Feld (Schwinger) . . . . .	35
A.2	Skizze des rigorosen Beweises der adiabatischen Paarerzeugung . . . . .	36
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>41</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>43</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>44</b>
	<b>Erklärung</b>	<b>45</b>

## **Gliederung der Arbeit**

Ziel der Arbeit ist die verständliche Darstellung des Prozesses der adiabatischen Paarerzeugung. Im ersten Teil der Arbeit (Abschnitt 1) wird ein Überblick über die theoretischen Grundlagen der Paarerzeugung gegeben. Es werden die für die weitere Argumentation benötigten Eigenschaften des Dirac-Operators sowie sein Verhalten unter Kopplung an ein externes Feld besprochen. Neben der Klärung von Grundbegriffen ist die zentrale Frage dieses Abschnitts, aus welchen Gründen man sich zum Zwecke der adäquaten Beschreibung von Paarerzeugung mit dem Dirac-See-Bild gegen das in der Literatur bevorzugte Bild der zweiten Quantisierung zu entscheiden hat. Nach einer Darstellung von Rechnungen zu Paarerzeugung in zeitunabhängigen externen Feldern (Abschnitt 2) folgt der Hauptteil der Arbeit (Abschnitt 3): Die Besprechung der adiabatischen Paarerzeugung in langsam veränderlichen externen Feldern, in denen Paarerzeugung im überkritischen Fall mit Wahrscheinlichkeit 1 auftritt. Dieser Teil der Arbeit gliedert sich in vier Teile: Abschnitt 3.1 ist der heuristischen Darstellung des Prozesses sowie der Klärung der Frage gewidmet, inwieweit eine Ein-Teilchen-Interpretation des Prozesses zulässig ist. Anschließend wird das zentrale Theorem zitiert (Abschnitt 3.2) sowie die Idee seines Beweises skizziert (Abschnitt 3.3). Die weitere Argumentation beruht maßgeblich auf der Einführung verallgemeinerter Eigenfunktionen: Sie ermöglichen eine Beschreibung der Zeitentwicklung der gestreuten Wellenfunktion und somit des Streuvorgangs. Die Arbeit enthält keinen rigorosen Beweis der adiabatischen Paarerzeugung, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Eine Skizze des rigorosen Beweises ist im Anhang zu finden. Als Ausblick wird im Schlussteil (Abschnitt 4) auf mögliche experimentelle Realisierungen der adiabatischen Paarerzeugung eingegangen.

## **Zur Notation**

Bis auf wenige Ausnahmen zur Abschätzung von Größenordnungen in Abschnitt 2 und Abschnitt 4 wird in der gesamten Arbeit  $\hbar = c = 1$  gesetzt.  $m$  bezeichnet die Ruhemasse des Elektrons.

## 0 Einleitung

Man beginnt eine Arbeit gerne mit einer Definition: *Paarerzeugung ist...* Die meisten Lehrbücher vollenden den Satz mit ...*die Erzeugung eines Teilchen-Antiteilchen-Paares*, bzw. im Fall der vorliegenden Arbeit ...*die Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares*. Diese Definition lässt eine Frage unbeantwortet: *Woraus entstehen die Teilchen?* Für die vorliegende Arbeit gilt: Aus dem “Vakuum”, unter Einfluss eines ausreichend starken externen Feldes. Dies ist jedoch mitnichten eine Antwort auf die Frage, sie verschiebt die Frage nur auf den nicht minder fraglichen Begriff des Vakuums. Für diesen scheint jeder Forschungszweig der Physik eine eigene Definition geprägt zu haben. Allein für den Spezialfall der Paarerzeugung werden uns zwei diametral entgegengesetzte Konzepte begegnen: Der gänzlich teilchenfreie Raum der zweiten Quantisierung und der mit unendlich vielen Elektronen negativer Energie gefüllte Raum Diracs.

Wird die zweite Quantisierung ernst genommen, so wäre die Gegenfrage *Welche Teilchen?* zu stellen, da diese Theorie ausschließlich von Feldern spricht. Paarerzeugung bedeutet, dass ein externes Feld Anregungen (= Feldquanten) des “Vakuumfeldes” induziert. Möchte man die intuitive Vakuuminterpretation der zweiten Quantisierung nutzen, muss man sich konsequenterweise damit abfinden, die Teilcheninterpretation aufzugeben. Akzeptiert man dies, verbleibt dennoch ein Problem: Gemäß dem Shale-Stinespring-Kriterium ist die Implementierung einer Zeitentwicklung auf dem Fockraum der zweiten Quantisierung nur eingeschränkt möglich.

In Diracs Theorie hingegen irritiert etwas anderes: Die Definition des Vakuums. Um die zunächst unverständlichen Lösungen der Dirac-Gleichung mit negativen Energiewerten physikalisch zu deuten, postulierte Dirac einen “See” von Elektronen negativer Energie. In diesem Bild ist Paarerzeugung äquivalent zur Änderung des Energiezustandes eines *einzigsten* Teilchens: Durch ein adiabatisch veränderliches externes Feld wird Energie an ein Teilchen übertragen und dieses aus dem “Dirac-See” unendlich vieler Elektronen negativer Energie zu Bereichen positiver Energie angehoben. Das Elektron streut dort vollständig, während das zurückbleibende “Loch” im See als Positron erscheint. Dieses Phänomen wird als adiabatische Paarerzeugung bezeichnet. Obige Frage *Woraus entstehen die Teilchen?* erfordert eine differenzierte Antwort: Die Frage *Woraus?* lässt sich mit *Aus dem Dirac-See* beantworten, *entstehen* ist in diesem Bild jedoch unpassend, da im engeren Sinn keine Teilchen erzeugt werden, sondern das *eine* relevante Teilchen schon immer existiert und die “Erzeugung” des Paares nur der Änderung seines Energiezustandes entspricht.

## 1 Theoretische Grundlagen

### 1.1 Eigenschaften des Dirac-Operators

Für die physikalisch korrekte Beschreibung der Paarerzeugung wird eine relativistische Formulierung der Quantenmechanik benötigt. Da in der speziellen Relativi-

tätstheorie physikalische Gesetze in allen Inertialsystemen gleichermaßen Gültigkeit besitzen, muss eine relativistische Quantenmechanik notwendigerweise Lorentz-kovariant sein. In einer relativistischen Theorie sind daher alle vier Dimensionen der Raumzeit gleichberechtigt. Die Theorie sollte diese Symmetrie zwischen Orts- und Zeitkoordinaten widerspiegeln. Zudem sollte sie die Axiome der klassischen Quantenmechanik enthalten. Zumindest ein Konzept der nichtrelativistischen Quantentheorie muss jedoch neu überdacht werden: Die Teilchenerhaltung der klassischen Quantenmechanik ist verletzt, da bei genügend hohen Energien Teilchen erzeugt / vernichtet werden können.<sup>1</sup>

Offensichtlich ist die freie, zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2m}\Delta\psi \quad (1)$$

nicht Lorentz-kovariant, da die Orts- und Zeitableitungen in unterschiedlichen Potenzen auftreten. Dirac suchte daher nach einer neuen Wellengleichung, die 1. Ordnung in der Zeitableitung und – um der relativistischen Kovarianz zu genügen – auch 1. Ordnung in den räumlichen Ableitungen ist und für die  $\rho = \psi^\dagger\psi$  eine positiv-definite Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt.<sup>2</sup> 1929 formulierte er die Lorentz-kovariante<sup>3</sup> Dirac-Gleichung:

$$i\partial_t\psi = \left( -i\sum_{k=1}^3 \alpha_k \partial_k + \beta m \right) \psi \quad (2)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  und  $\beta$  sind hermitesche  $4 \times 4$  Matrizen. Eine häufig gewählte Darstellung der Matrizen ist:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit den Paulimatrizen  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Der freie Dirac-Operator<sup>4</sup>

$$D_0 = -i\sum_{k=1}^3 \alpha_k \partial_k + \beta m \quad (4)$$

ist ein  $4 \times 4$ -Matrixdifferentialoperator. Er lässt sich als Hamiltonoperator eines freien Elektrons interpretieren. Die Eigenfunktionen<sup>5</sup> des freien Dirac-Operators

$$D_0\varphi_0(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) = E_k\varphi_0(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) = \pm\sqrt{m^2 + k^2}\varphi_0(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) \quad (5)$$

<sup>1</sup>Siehe [6] Relativistic Theory of the Electron, [13] Kapitel 1, [2] Kapitel 1.

<sup>2</sup>Ursprüngliche Herleitung siehe Diracs Originalarbeit “Relativistic Theory of the electron” in [6].

<sup>3</sup>Nachweis der Kovarianz siehe z.B. [2, 37].

<sup>4</sup>Siehe [40] Kapitel 1.

<sup>5</sup>Siehe [24].

haben die Form ebener Wellen  $\varphi_0(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\xi(\mathbf{k}, j)$ , wobei  $\xi$  ein vierkomponentiger, vektorwertiger Spinor  $\xi \in \mathbb{C}^4$  ist. Für jeden Impulswert sind vier Lösungen  $\varphi_0(\mathbf{k}, j, \mathbf{x})$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  möglich.  $j$  ist ein kombinierter Spin- und Vorzeichenindex: Energievorzeichen “+” für  $j = 1, 2$ , Vorzeichen “-” für  $j = 3, 4$ . Ein geeigneter Hilbertraum für  $D_0$  ist in Anlehnung an die klassische Quantenmechanik:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^3)^4 = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^4 \quad (6)$$

$D_0$  ist auf seinem Definitionsbereich  $\mathcal{D}(D_0) = H^1(\mathbb{R}^3)^4 \subset \mathcal{H}$  selbstadjungiert.<sup>6</sup> Das Spektrum des freien Dirac-Operators ist kontinuierlich und ergibt sich zu:<sup>7</sup>

$$\sigma(D_0) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty) \quad (7)$$

Das Spektrum besteht aus einem Kontinuum positiver und negativer Energielösungen, die durch eine Energielücke der Breite  $2m$  getrennt sind. Der Hilbertraum des freien Dirac-Operators lässt sich in zwei orthogonale Unterräume unterschiedlicher Energievorzeichen aufspalten:<sup>8</sup>

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \quad (8)$$

Zur Trennung der Unterräume werden orthogonale Projektoren  $P_{\pm}^0$  verwendet:

$$P_{\pm}^0 = \frac{1}{2} (1 \pm \operatorname{sgn}(D_0)) \quad (9)$$

Die Dirac-Gleichung weist auf den ersten Blick ein fundamentales Problem auf: Die Zustände negativer Energie. Könnte man die negativen Energielösungen nicht einfach für physikalisch unsinnig erklären und sie aus der physikalischen Deutung ausschließen? Wie Dirac in [4] hervorhebt, wäre dies in einer *klassischen* Theorie ohne Weiteres möglich. Da sich dynamische Größen nur kontinuierlich verändern, ist ein Übergang zwischen den beiden durch die Energielücke getrennten Kontinua nicht möglich. Werden die Lösungen mit positiver Energie als die physikalisch sinnvollen definiert, können die Lösungen mit negativer Energie ignoriert werden. Da die Projektoren mit dem freien Dirac-Operator  $D_0$  kommutieren, ist im Falle eines *freien Teilchens* in der Quantenmechanik eine analoge Argumentation zulässig. Wird jedoch eine Störung des Systems zugelassen, beispielsweise die Kopplung an ein externes Feld, sind diskontinuierliche Übergänge zwischen den Zuständen positiver und negativer Energie z.B. durch die Emission von Photonen mit  $E > 2m$  möglich – die Zustände negativer Energie dürfen sodann nicht mehr ignoriert werden. Auch wenn ihre Interpretation zunächst Probleme hervorruft, eröffnet sich mit den Zuständen negativer Energie eine interessante theoretische Perspektive: Die Beschreibung der Paarerzeugung. Vor der Interpretation der negativen Energien soll jedoch um der Übersichtlichkeit willen zunächst der Einfluss eines externen Feldes auf die Dirac-Gleichung besprochen werden.

<sup>6</sup>Siehe [40] Theorem 1.1.  $H^1$  ist der erste Sobolev-Raum.

<sup>7</sup>Siehe [40] Theorem 1.1.

<sup>8</sup>Siehe [40] Kapitel 1.

## 1.2 Kopplung an ein externes Feld

Was ist ein externes Feld? Man versteht darunter die idealisierte Annahme eines Feldes, bei dem die Rückwirkung der Teilchen auf das Feld vernachlässigt wird, d.h. das Feld beeinflusst zwar die Bewegung der Teilchen, die Teilchen erzeugen jedoch selbst keine Felder.<sup>9</sup> Zudem impliziert der Begriff externes Feld im Rahmen dieser Arbeit, dass ein klassisches, d.h. nicht quantisiertes Feld, angenommen werden darf. Diese Näherung ist immer möglich, wenn die Energiequantelung des Feldes um Vieles kleiner als alle relevanten Energieskalen und das Feld zugleich ausreichend stark ist (d.h. das Feld besteht aus vielen Photonen niedriger Energie).

Das Feld wird im allgemeinen Fall mit einer  $4 \times 4$ -Potentialmatrix  $V(t, \mathbf{x})$  implementiert. Der Dirac-Operator mit Kopplung an das externe Feld lautet:<sup>10</sup>

$$D = D_0 + V \quad (10)$$

Zwei Aspekte bleiben zu klären: Die Selbstadjungiertheit und das Spektrum des gestörten Dirac-Operators  $D = D_0 + V$ . Die Forderung nach Selbstadjungiertheit bedingt notwendigerweise die Hermitizität der Potentialmatrix  $V$ . Kann gezeigt werden, dass  $V$   $D_0$ -beschränkt mit  $a < 1$  ist, d.h.

$$\|V\psi\| \leq a\|D_0\psi\| + b\|\psi\| \quad (11)$$

mit  $a < 1$ ,  $b \in \mathbb{R}$  und  $\mathcal{D}(D_0) \subset \mathcal{D}(V)$ , lässt sich mit dem Kato-Rellich-Theorem die Selbstadjungiertheit auf  $\mathcal{D}(D_0)$  beweisen.<sup>11</sup>

Das Spektrum<sup>12</sup> des gestörten Dirac-Operators ändert sich im Allgemeinen durch das externe Feld. Die meisten Potentiale lassen jedoch das wesentliche oder essentielle Spektrum  $\sigma_{ess}(D_0)$  von  $D_0$  invariant, wobei

$$\sigma_{ess}(D_0) \equiv \sigma(D_0) \setminus \sigma_{dis}(D_0) \quad (12)$$

$\sigma_{dis}(D_0)$  ist das diskrete Spektrum, d.h. die Menge aller isolierten Eigenwerte mit endlich-dimensionalem Eigenraum. Nach einem Theorem von Weyl<sup>13</sup> gilt: Sind die Operatoren  $D$  und  $D_0$  selbstadjungiert und ist  $(D + i)^{-1} - (D_0 + i)^{-1}$  kompakt, so gilt:  $\sigma_{ess}(D) = \sigma_{ess}(D_0)$ . Das wesentliche Spektrum von  $D_0$  ist dabei offensichtlich durch  $\sigma_{ess}(D_0) = \sigma(D_0) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$  gegeben.

Das essentielle Spektrum – positives und negatives Energiekontinuum mit Energielücke der Breite  $E = 2m$  – bleibt also erhalten. Es können jedoch *zusätzliche* diskrete Eigenwerte in der Energielücke existieren.

Bezüglich Paarerzeugung interessiert insbesondere die Kopplung an ein externes elektromagnetisches Feld. Für elektromagnetische Felder gilt nach dem Prinzip der minimalen Kopplung zur Erhaltung der Eichinvarianz die folgende Ersetzung:<sup>14</sup>

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu \quad (13)$$

<sup>9</sup>Siehe [40] Kapitel 4.

<sup>10</sup>Siehe [40] Kapitel 4 für Diskussion verschiedener Potentiale.

<sup>11</sup>Siehe [31] Abschnitt X.2 und [40] Kapitel 4, insbes. Theorem 4.2 und 4.3.

<sup>12</sup>Siehe Definitionen in [30] Abschnitt VII.3, [40] Kapitel 4.

<sup>13</sup>Siehe [32] Theorem XIII.14 und Korollar 1.

<sup>14</sup>Siehe [37] Abschnitt 5.3.5.

Dabei ist  $A = (A^\mu) = (A_0, \mathbf{A})$  das Viererpotential des klassischen elektromagnetischen Feldes und  $q$  die Ladung des Teilchens, d.h.  $q = -e$  für ein Elektron. Die Dirac-Gleichung mit Kopplung an ein externes elektromagnetisches Feld für ein Elektron lautet:

$$i\partial_t\psi = \left( -i \sum_{k=1}^3 \alpha_k \partial_k + \beta m + e \sum_{k=1}^3 \alpha_k A_k - e A_0 \right) \psi = (D_0 + V_{em})\psi \quad (14)$$

### 1.3 Die Löcher-Theorie und der Dirac-See

Wie werden die Zustände negativer Energie interpretiert? In Abschnitt 1.1 wurde bereits gezeigt, dass die negativen Energien nicht als physikalisch sinnlos deklariert werden können. Das negative Energiekontinuum stellt außerdem in Form der sog. *Strahlungskatastrophe* ein ernsthaftes Problem dar: Ist die Kopplung an das Strahlungsfeld erlaubt, können Elektronen aus dem positiven Teil des Spektrums durch Emission von Photonen in das negative Kontinuum fallen. Da das negative Energiespektrum nach unten unbeschränkt ist, kann das Elektron durch die Emission weiterer Photonen beliebig viel Energie in Form von Strahlung abgeben, während es im Spektrum immer weiter nach unten wandert.<sup>15</sup>

1930 fand Dirac eine Lösung für dieses Problem:<sup>16</sup> Er postulierte, dass normalerweise alle negativen Energiezustände bereits mit Elektronen besetzt seien (“Dirac-See”). Damit gab Dirac eine neue Definition des Vakuums: Das *Vakuum* ist der Zustand, in dem alle Zustände positiver Energie unbesetzt, alle – unendlich vielen – negativen Energiezustände mit Elektronen besetzt sind. Wegen des Pauli-Prinzips kann jeder Zustand nur von *einem* Elektron besetzt sein, daher ist eine Strahlungskatastrophe ausgeschlossen. Ein Elektron aus dem Dirac-See kann durch Absorption eines Photons geeigneter Energie in einen positiven Energiezustand angehoben werden. Dem zurückbleibenden “Loch”, d.h. dem unbesetzten Zustand negativer Energie, kann die positive Ladung  $e$  und eine *positive* Energie zugeordnet werden, da das Loch durch das *Fehlen* eines Elektrons mit Ladung  $-e$  und negativer Energie charakterisiert ist. Bei dem Lochzustand handelt es sich um ein neues Teilchen. Die Identität dieses Teilchens war zunächst unklar – Dirac selbst glaubte zu Beginn, es handle sich um das Proton.<sup>17</sup> Jedoch konnte Oppenheimer zeigen, dass die Annihilationsrate von Elektron und Loch so groß ist, dass in diesem Fall die Existenz stabiler Atome nicht zu erklären wäre.<sup>18</sup> Zudem sollten Masse von Elektron und Loch gleich sein. So wurden die unbesetzten Zustände im negativen Energiekontinuum mit dem Antiteilchen des Elektrons, dem Positron, identifiziert.

Formal lässt sich das “Vakuum”, d.h. der Dirac-See, als antisymmetrisiertes Produkt der Eigenfunktionen negativer Energie des freien Dirac-Operators schreiben

<sup>15</sup>Siehe [33] Abschnitt 3.9.

<sup>16</sup>Siehe [6] Theory of the Positron und Einleitung zu [5].

<sup>17</sup>Siehe [4].

<sup>18</sup>Siehe [23].

(entspricht einer Slater-Determinante bzw. dem unendlichen wedge-Produkt):<sup>19</sup>

$$\Omega = \mathcal{A} \prod_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}, j \in \{3,4\}} \varphi_0(\cdot, \mathbf{k}, j) \quad (15)$$

Die Elektronen negativer Energie im Dirac–See sind äußerst homogen verteilt. Daher sind nur Abweichungen vom Vakuum – Elektronen positiver Energie sowie Positronen – beobachtbar, nicht jedoch der See selbst. Die Teilchen des Dirac–Sees treten zwar untereinander und mit den realen Teilchen in Wechselwirkung, wegen der Homogenität des Dirac–Sees ist jedoch im Mittel *keine Wechselwirkung* festzustellen. Genauere Ausführungen zu dieser Frage finden sich in Abschnitt 3.1.

Die Löcher–Theorie besitzt eine bemerkenswerte Erklärungskraft, da sie Paarerzeugung als neues Phänomen enthält und unmittelbar verständlich macht. Wird ein Elektron ursprünglich negativer Energie in das positive Spektrum angehoben, bleibt ein Loch im Dirac–See zurück – der Beobachter “sieht” ein Elektron und ein Positron. Der Übergang kann im einfachsten Fall durch die Absorption eines Photons mit  $E > 2m$  geschehen: Der Vorgang  $e_{E<0}^- + \gamma \rightarrow e_{E>0}^-$  erscheint als  $\gamma \rightarrow e_{E>0}^- + e_{E>0}^+$ .<sup>20</sup>

Alternativ kann der Übergang unter Einfluss externer Felder erfolgen, da der Dirac–Operator mit Kopplung an ein externes Feld nicht in allen Fällen mit dem Vorzeichen des freien Dirac–Operators  $\text{sgn}D_0$  vertauscht und so Übergänge zwischen den Kontinua möglich werden.<sup>21</sup> Fällt das externe Potential für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  rasch genug ab, kann in der Streutheorie bewiesen werden, dass das Vorzeichen der Energie asymptotisch erhalten ist. Dies gilt jedoch nicht unbedingt für Potentiale, die für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  nicht verschwinden (siehe Abschnitt 2, Kleinsches Paradoxon) oder zeitabhängig sind (siehe Abschnitt 3, Adiabatische Paarerzeugung). Ein Zustand aus dem negativen Kontinuum kann in das positive Kontinuum angehoben werden und dort dauerhaft verbleiben – es tritt Paarerzeugung auf.

## 1.4 Zweite Quantisierung der Dirac–Gleichung und Streutheorie

Die Löcher–Theorie erklärt Paarerzeugung, ohne von der Ein-Teilchen-Interpretation der Dirac–Gleichung abzuweichen, indem sie Paarerzeugung als Übergang zwischen Zuständen negativer und positiver Energie beschreibt. Dazu muss ein “See” mit unendlich vielen Elektronen eingeführt werden. Diese Definition ist nicht unproblematisch. Meist wird die Dirac–Gleichung daher im Rahmen der zweiten Quantisierung als Viel-Teilchen-Theorie reinterpretiert, der ein neues Konzept des Vakuums – *der gänzlich teilchenfreie Raum* – zugrunde liegt. Die Wellenfunktion  $\psi$  auf dem Ein-Teilchen-Hilbertraum  $\mathcal{H}$  wird durch den Feldoperator  $\hat{\psi}$  auf dem Fockraum  $\mathcal{F}$  ersetzt. Die Feldquanten, d.h. die Anregungen des Feldes, werden mit “Teilchen” identifiziert und können durch Operatoren “erzeugt / vernichtet” werden.

<sup>19</sup>Siehe [24].

<sup>20</sup>Dieser Vorgang kann wg. Energie-/Impulserhaltung nur in einem äußeren Feld stattfinden, siehe [33] Abschnitt 3.9.

<sup>21</sup>Siehe [40] Abschnitt 4.5, Einleitung zu Kapitel 8, Abschnitt 8.5, Abschnitt 10.4.

Zurecht kann man fragen, wieso dieser – von den meisten Physikern bevorzugte – Formalismus in dieser Arbeit nicht angewendet wird. Der Grund dafür ist, dass die Zeitentwicklung, die für adiabatische Paarerzeugung fundamentale Bedeutung besitzt, nur sehr eingeschränkt auf dem Fockraum der zweiten Quantisierung implementiert werden kann. Auf eine Skizze des Formalismus wird zugunsten einer pointierten Darstellung der Probleme verzichtet, da eine ausführliche Darstellung in jedem Lehrbuch (z.B. [17, 33]) zur QFT / relat. QM gefunden werden kann.

Das zentrale Problem der zweiten Quantisierung ist nicht – wie zunächst vermutet werden könnte – der neue Vakuumbegriff oder die Aufgabe der Teilcheninterpretation, sondern vielmehr die Konstruktion des Fockraums. Dieser Vielteilchen-Hilbertraum dient zur Beschreibung von Zuständen mit beliebiger Anzahl von Elektronen / Positronen.<sup>22</sup> Ausgangspunkt der Konstruktion des Fockraums ist eine Aufspaltung des Hilbertraums des Dirac-Operators in die orthogonalen Unterräume  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$  unterschiedlichen Energievorzeichens. Die Aufspaltung ist durch die Projektoren  $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \text{sgn}D)$  definiert. Exakt diese initiale, für die gesamte Konstruktion grundlegende Aufspaltung stellt das Problem dar:<sup>23</sup> Ist das externe Feld zu stark, treten Durchmischungen der Unterräume auf, d.h. ein gebundener Zustand eines Elektrons / Positrons kann die Schwelle  $E = 0$  unter- / überschreiten. Die Unterscheidung in Teilchen / Antiteilchen ist in diesem Fall nicht mehr allein durch die Projektoren (d.h. Energievorzeichen) gegeben. Ist das externe Feld zeitabhängig, wird die theoretische Beschreibung noch komplizierter: Die Projektoren  $P_{\pm}(t) = U(t, 0)P_{\pm}(0)U(0, t)$  und somit die Aufspaltung des Hilbertraums  $\mathcal{H} = U(t, 0)\mathcal{H}_+ \oplus U(t, 0)\mathcal{H}_-$  werden zeitabhängig. Auch die Zuordnung “Teilchen / Antiteilchen” ändert sich mit der Zeit. Die Feldoperatoren  $\hat{\psi}$  sind in dieser Betrachtungsweise hingegen zeitlich konstant. Um die Teilcheninterpretation nicht aufzugeben, wird die Wechselwirkung im (zeitunabhängigen) Fockraum des freien Dirac-Operators  $\mathcal{F}_0$  dargestellt und eine zeitabhängige Darstellung der Feldoperatoren gewählt. Gelöst ist das Problem dadurch nicht – es verschiebt sich nurmehr auf die Frage, ob die für die Umformulierung benötigte Zeitentwicklung  $U$  auf  $\mathcal{F}_0$  existiert.<sup>24</sup> Laut einem *Theorem von Shale und Stinespring*<sup>25</sup> ist dies im Allgemeinen nicht der Fall:

**Theorem 1** *Die unitäre Transformation  $U$  auf  $\mathcal{H}$  ist genau dann auf dem Fockraum  $\mathcal{F}_0$  als unitärer Operator  $\mathbb{U}$  implementierbar, wenn  $U_{+-}$  und  $U_{-+}$  Hilbert-Schmidt-Operatoren sind.*

$U_{+-}$ ,  $U_{-+}$  sind die Nebendiagonal-Elemente von  $U$  ( $U_{ik} = P_i^0 U P_k^0$   $i, k \in \{-, +\}$ ).

Gemäß einem Theorem von Ruijsenaars aus dem Jahr 1976 gilt das Shale-Stinespring-Kriterium für ein elektromagnetisches Viererpotential nur dann, wenn die räumlichen Komponenten verschwinden, d.h.  $A_0 \neq 0$ ,  $\mathbf{A} = 0$ .<sup>26</sup> Vereinfacht

<sup>22</sup>Siehe [40] Kapitel 10 für Herleitung / detaillierte Konstruktion.

<sup>23</sup>Siehe [40] Abschnitt 10.1 und 10.4.

<sup>24</sup>Siehe [40] Abschnitt 10.1 und 10.4.

<sup>25</sup>Siehe [40] Abschnitt 10.3.3 und [20]. Ein Operator ist ein Hilbert-Schmidt-Operator genau dann, wenn  $\text{tr}T^*T < \infty$  ([30], Abschnitt VI.6).

<sup>26</sup>Siehe [19].

gesprochen muss das Magnetfeld verschwinden, um ein Problem in zweiter Quantisierung formulieren zu können. Wieso ist dies der Fall? Anschaulich kann man sich die Spinoren realer Elektronen und der See-Elektronen als zueinander orthogonale Vektoren vorstellen. Ein Magnetfeld dreht die See-Vektoren, sodass diese einen Anteil in Richtung der realen Vektoren erhalten (und umgekehrt) – während der Wechselwirkung mit dem Magnetfeld entstehen unendlich viele virtuelle Paare. Mit der unendlichen Teilchenanzahl kann die zweite Quantisierung nicht umgehen.<sup>27</sup> Zudem können keine Eichtransformationen implementiert werden, die zu einem nicht-verschwindenden Vektorpotential führen.<sup>28</sup> Im Allgemeinen ist die Zeitentwicklung nicht auf den Fockraum übertragbar.

Einen (scheinbaren) Ausweg bietet die Einführung der Streumatrix:<sup>29</sup> Man verzichtet auf die konkrete Zeitentwicklung und begnügt sich mit dem *freien, asymptotischen* Anfangs- und Endzustand einer Wechselwirkung. Die Wechselwirkung selbst ist eine “black box”. Es wird die Existenz sich frei entwickelnder Anfangs- und Endzustände  $\psi_i$  und  $\psi_f$  angenommen, gegen die der Streuzustand  $\psi$ , der eine Zeitentwicklung mit dem gestörten Dirac-Operator  $e^{-iDt}$  durchläuft, für  $t \rightarrow \pm\infty$  konvergiert<sup>30</sup>:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|e^{-iDt}\psi - e^{-iD_0t}\psi_{f/i}\| = 0 \quad (16)$$

Es werden die Wellenoperatoren<sup>31</sup>  $W_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iDt} e^{-iD_0t}$  definiert. Mit ihnen ist die Entwicklung des Streuzustandes durch  $\psi = W_{\pm}\psi_{f/i}$  gegeben. Die Wellenoperatoren beschreiben die gesamte Entwicklung von  $\psi$ . Diese Information geht verloren, wenn die unitäre Streumatrix

$$S = W_+^* W_- = "U(\infty, -\infty)" \quad (17)$$

eingeführt wird, die  $\psi_i$  auf  $\psi_f$  abbildet:  $\psi_f = S\psi_i$ . Die  $S$ -Matrix hat den Vorteil, dass sie sich immer als unitärer Operator  $\mathbb{S}$  auf dem Fockraum implementieren lässt. Anfangs- und Endzustand der Wechselwirkung sind *frei*, die problematischen virtuellen Teilchen verschwinden mit dem Potential, nur die realen Teilchen bleiben übrig. Der Preis für diese Formulierung ist jedoch die Zeitentwicklung des Zustandes.

*Falls* ein Problem in zweiter Quantisierung und der Löcher-Theorie formulierbar ist, sind diese in ihren Vorhersagen *äquivalent*. Das Defizit der zweiten Quantisie-

---

<sup>27</sup>Exakter: Für ein freies Teilchen sind die Lösungen der Dirac-Gleichung  $i\partial_t\psi = \beta m\psi$  das Produkt von ebenen Wellen und den kanonischen Eigenvektoren  $\hat{e}_n$   $n = 1, 2, 3, 4$ .  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  sind positiven Energien zuzuordnen, da sie Eigenvektoren der Matrix  $\beta$  zum Eigenwert 1 sind,  $\hat{e}_3, \hat{e}_4$  sind negativen Energien zuzuordnen, da sie Eigenvektoren zum Eigenwert -1 sind. Betrachtet man die Kombination  $\alpha_j \hat{e}_{3/4}$ , ist diese wegen der Vertauschungsrelation  $\alpha_j \beta = -\beta \alpha_j$  ein Eigenwert *positiver Energie*. Diese Kombination taucht auf, wenn das externe Potential ein nicht-verschwindendes Vektorpotential besitzt:  $i\partial_t\psi = \left(-i \sum_{k=1}^3 \alpha_k \partial_k + \beta m + e \sum_{k=1}^3 \alpha_k A_k - e\phi_{el}\right)\psi$ . Der “magnetische Anteil” des Viererpotentials “rotiert” Wellenfunktionen aus dem Dirac-See in das positive Kontinuum. Unendliche viele virtuelle Paare entstehen. Argument entnommen aus [8].

<sup>28</sup>Siehe [19].

<sup>29</sup>Siehe [14] Kapitel 8 und [17] Kapitel 4.

<sup>30</sup> $\psi_{i/f}$ ,  $\psi$  zu beliebig festgelegter Zeit  $t = 0$  gewählt.

<sup>31</sup>Siehe [7] Kapitel 16, [40] Kapitel 8.

ung ist, dass sie keine Zeitentwicklung darstellen kann, sondern mit der Streumatrix nur freie Anfangs- und Endzustände beschreibt. Für Paarerzeugung in externen Feldern kann nur eingeschränkt auf diesen Formalismus zurückgegriffen werden, da hier die genaue Kenntnis der Zeitentwicklung von fundamentaler Bedeutung ist. Die Diracsche Deutung sollte nicht von vornherein als überholt abgetan werden. Zumindest für Paarerzeugung ist sie als Theorierahmen besser geeignet als die zweite Quantisierung.

## 2 Paarerzeugung – Zeitunabhängige Probleme

Die historisch erste Beschreibung von Paarerzeugung ist auf Klein<sup>32</sup> (1929) zurückzuführen. Er untersuchte die Reflexion von Elektronen an einem elektrostatischen Potential der Form

$$V(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 & \text{Bereich I} \\ V_0 > 0 & z > 0 & \text{Bereich II} \end{cases} \quad (18)$$

Er kam zum zunächst unverständlichen Ergebnis, dass Elektronen – wenn eine Ein-Teilchen-Interpretation zugrunde gelegt wird – scheinbar für  $V_0 > E + m$  in den klassisch verbotenen Bereich II eindringen können, statt wie erwartet vollständig an der Barriere reflektiert zu werden, und dabei das Vorzeichen ihrer kinetischen Energie wechseln.

Das Ergebnis ist leicht nachzuvollziehen:<sup>33</sup> Für ein in  $z$ -Richtung laufendes Elektron sind die Lösungen der Dirac-Gleichung für einfallende, reflektierte und transmittierte Wellenfunktion Produkte aus ebenen Wellen und Spinoren, die von Impuls und Spin abhängen:

$$\psi_{I,ein} = \xi_{I,ein}(k, j) e^{ip_I z} \quad \psi_{I,ref} = \xi_{I,ref}(k, j) e^{-ip_I z} \quad \psi_{II} = \xi_{II}(k, j) e^{ip_{II} z} \quad (19)$$

$$p_I = \sqrt{E^2 - m^2} \quad p_{II} = \sqrt{(V_0 - E)^2 - m^2} \quad (20)$$

Aus (19) und (20) ist ersichtlich, dass die Wellenfunktionen in Bereich I grundsätzlich oszillatorisches Verhalten aufweisen. In Bereich II hingegen treten drei verschiedene Arten von Lösungen auf, die von der Höhe der Potentialstufe abhängen:

- Für  $V_0 < E - m$  ist  $p_{II}$  reell, die von links kommenden Elektronen können in Bereich II eindringen und verringern dabei ihre kinetische Energie auf  $E - m - V_0$ .
- Für  $E - m < V_0 < E + m$  ist  $p_{II}$  imaginär, die einfallenden ebenen Wellen werden exponentiell gedämpft.
- Für  $V_0 > E + m$ , wird  $p_{II}$  wieder reell – im klassisch verbotenen Bereich existieren oszillierende Lösungen mit negativer kinetischer Energie.

<sup>32</sup>Siehe [18] und [13] Kapitel 13.

<sup>33</sup>Für explizite Rechnungen sei auf [13] Kapitel 13 und [18] verwiesen. Hier werden nur die wichtigsten Resultate zitiert, da die Rechnung an sich keine neuen Einsichten liefert

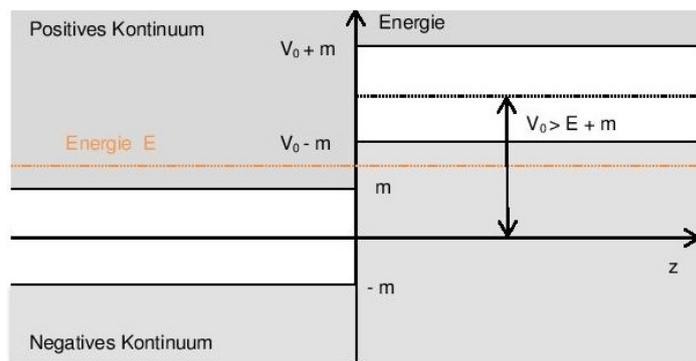


Abbildung 1: Kleinsches Paradoxon: Verschiebung der Energiekontinua im Fall  $V_0 > E + m$

Zur Auflösung des Paradoxons werden die Elektronenströme betrachtet, für die sich im Fall  $V_0 > E + m$  ergibt:  $|\mathbf{j}_{I,ein}| < |\mathbf{j}_{I,ref}|$  und  $\mathbf{j}_{I,ein} + \mathbf{j}_{I,ref} = \mathbf{j}_{II}$ , wobei  $\mathbf{j}_{II}$  in  $-z$ -Richtung fließt.<sup>34</sup> Letzteres bedeutet, dass zusätzliche Elektronen aus der Potentialstufe *austreten*. In einer Ein-Teilchen-Interpretation ist dies unverständlich – wo sollten “zusätzliche” Elektronen herkommen? Wie Hund<sup>35</sup> 1941 argumentierte, lässt sich das Paradoxon im Rahmen der Löchertheorie leicht auflösen: Ist  $V_0 > E + m$ , wird das negative Kontinuum so weit angehoben, dass positives Kontinuum für  $z < 0$  und negatives Kontinuum für  $z > 0$  im Bereich  $m < E < V_0 - m$  überlappen (siehe Abb. 1). Die einfallenden Elektronen können weitere Elektronen aus dem Dirac-See herausschlagen, zurück bleiben unbesetzte Zustände – Löcher bzw. Positronen, welche die zunächst paradox erscheinenden Lösungen “negativer” kinetischer Energie darstellen. Der “transmittierte Elektronenstrom”  $\mathbf{j}_{II}$  in  $-z$ -Richtung stellt tatsächlich einen Positronenstrom in  $+z$ -Richtung dar. Am Potentialsprung findet Paarerzeugung statt.

Hund zeigte in seiner Arbeit zudem, dass in der *ungequantelten* Dirac-Theorie Materieerzeugung wie oben beschrieben nur dann auftritt, wenn *Materie einströmt*. In einer *gequantelten* Dirac-Theorie – die durch die Löcher-Theorie de facto bereits gegeben ist – tritt Materieerzeugung an einer Potentialstufe auch *ohne* einströmende Materie auf. Dieser zweite Fall lässt sich als eine Art Zerfall des Vakuums<sup>36</sup> interpretieren. Unterschreitet die Höhe der Potentialstufe den kritischen Wert  $V_{0,crit} = E + m$  ist das *neutrale Vakuum*, d.h. der Zustand ohne reale Teilchen, der stabile Grundzustand des Systems. Wird das Potential hingegen *überkritisch*, d.h. ist  $V_0 > E + m$ , kommt es zum Überlappen der Kontinua. Das Vakuum zerfällt spontan, Elektronen aus dem negativen Kontinuum streuen ins Unendliche weg und lassen Löcher zurück. Es entsteht ein *geladenes Vakuum*, das gleiche Anzahl von

<sup>34</sup>Dies ist nicht mit einem Reflexionskoeffizienten  $R > 1$  gleichzusetzen. Da – wie unten dargestellt – Paarerzeugung auftritt, ist die Teilchenzahl nicht erhalten und die Definition von  $j_{ref}/j_{ein}$  als Reflexionskoeffizient ist unsinnig. Der Reflexionskoeffizient der einfallenden Teilchen ist grundsätzlich  $R \leq 1$ , da man berücksichtigen muss, dass der Impuls der “transmittierten Elektronen” in  $-z$ -Richtung gerichtet ist (siehe [13] Kapitel 13).

<sup>35</sup>Siehe [16], [13] Kapitel 13.

<sup>36</sup>Siehe [11], [12] Kapitel 1.

Teilchen und Antiteilchen enthält.

Trotz dieser Deutung bleibt das Kleinsche Paradoxon ein Gedankenexperiment ohne praktische Anwendung: Wird das Paradoxon nach Hund als fortwährende Erzeugung von Teilchen-Antiteilchen-Paaren interpretiert, stößt man auf das Problem, dass es keinen stationären Zustand – und damit keinen Grundzustand – mehr gibt. Sobald das Potential überkritisch ist, können bis in fernste Zukunft Elektron-Positron-Paare entstehen, da eine unendliche Potentialstufe niemals “leer” wird.

Sinnvoller ist der Vorschlag von Beck, Steinwedel und Süßmann<sup>37</sup>, die einen endlichen Potentialtopf betrachteten. Da es in diesem Topf kein Kontinuum von Zuständen, sondern nur *diskrete gebundene Zustände* gibt, entsteht eine genau definierte Anzahl von Elektron-Positron-Paaren, die durch die Anzahl der unbesetzten gebundenen Zustände gegeben ist, die eine Energie  $E < m$  besitzen. Die Idee, Paarerzeugung als Folge des Eintauchens gebundener Zustände in das Kontinuum entgegengesetzten Energievorzeichens zu interpretieren, enthält bereits die Grundidee der adiabatischen Paarerzeugung.

Zudem überrascht der hohe “Transmissionskoeffizient” (d.h. Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung), den Klein in seiner ursprünglichen Arbeit angibt. Es zeigte sich, dass dies Folge des unrealistischen Potentialsprungs ist, der ein unendliche hohes elektrisches Feld bei  $z = 0$  impliziert. Sauter<sup>38</sup> ersetzte den Potentialsprung durch ein Feld, das wie  $V(z) = \mathcal{V}z$  linear von 0 auf  $V_0$  anwächst. Er erhielt für den Transmissionskoeffizienten im überkritischen Fall einen exponentiellen Abfall ( $\hbar$  und  $c$  eingesetzt):

$$T = e^{-k^2\pi} \quad k = \sqrt{\frac{2\pi}{hc\mathcal{V}}}mc^2 \quad (21)$$

Experimentell erfassbare Werte für  $T$  sind zu erwarten, wenn  $k^2 \sim 1$  d.h.  $\mathcal{V} \frac{\hbar}{mc} \sim mc^2$ . Der Potentialanstieg muss pro Comptonwellenlänge ungefähr die Ruheenergie eines Elektrons betragen, damit Paarerzeugung beobachtet werden kann. Dies entspricht Feldstärken von ca.  $10^{16} \frac{V}{cm}$ , die experimentell (noch) nicht realisiert werden können.

Der Vollständigkeit halber sollte auch Schwingers Rechnung aus dem Jahr 1951 erwähnt werden, auf die sich fast alle aktuellen Paper im Bereich der Experimentalphysik stützen, die – fälschlicherweise – Paarerzeugung in starken Laserfeldern vorhersagen (siehe Abschnitt 4.2). Schwinger<sup>39</sup> gab 1951 eine eichinvariante Lösung für Paarerzeugung in einem räumlich wie zeitlich konstanten elektrischen Feld (E-Feld) an. Ein kurzer Abriss der Rechnung ist im *Anhang A.1* gegeben. Endergebnis ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für Paarerzeugung  $w(x) = \frac{\alpha E^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{|eE|}\right)$ . Die Größenordnung der für die experimentelle Beobachtung benötigten Felder stimmt mit Sauters Rechnung überein. Auch Schwinger erhält eine exponentielle Unterdrückung der Paarerzeugung. Dies überrascht nicht, da die gleiche Situation wie zuvor – lediglich in anderer Formulierung – betrachtet wird: Durch das angelegte Feld wird die Energielücke zwischen positivem und negativem Kontinuum “gekippt”.

---

<sup>37</sup>Siehe [1].

<sup>38</sup>Siehe [34, 35].

<sup>39</sup>Siehe [38], [17] Abschnitt 4.3.

Je stärker sie gekippt wird, desto schmaler erscheint die Lücke für einfallende Elektronen. Die Wellenfunktion wird in der Lücke exponentiell gedämpft. Ist die Lücke schmal genug, können die Elektronen analog zum Tunneleffekt in der klassischen Quantenmechanik die Energielücke durchtunneln.

Abschließend ist noch der wichtige Spezialfall eines statischen externen Potentials  $V$  zu nennen.<sup>40</sup> (Dies ist nicht mit Schwingers Rechnung zu verwechseln:  $V$  ist das Potential im gekoppelten Dirac-Operator, *kein* E- / B-Feld) Die Streumatrix  $S$  aus Abschnitt 1.4 kommutiert in diesem Fall mit dem freien Dirac-Operator  $D_0$  und lässt die Unterräume  $\mathcal{H}_\pm$  invariant. Daraus folgt, dass  $\mathbb{S}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$  – die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung ist Null. Dies ist eine einfache Anwendung des Energieerhaltungssatzes: Ein statisches Feld überträgt keine Energie an die Elektronen, somit können diese die Energielücke zwischen den Energiekontinua nicht überwinden. Folglich ist keine Paarerzeugung möglich.

Die bisherigen Rechnungen sind unbefriedigend: Die Probleme sind allesamt zeitunabhängig (bei Schwinger ist das Feld unendlich lange eingeschaltet), die Konfiguration der Systeme ist unrealistisch (unendliche Potentialstufe, unendlich ausge dehntes Feld). Im Rahmen der adiabatischen Paarerzeugung soll die Beschreibung der Paarerzeugung auf ein solideres Fundament gestellt werden.

## 3 Adiabatische Paarerzeugung

### 3.1 Heuristische Darstellung der adiabatischen Paarerzeugung<sup>41</sup>

Offensichtlich ist die bisherige Behandlung der Paarerzeugung nicht zufriedenstellend. Wieso aber *adiabatische* Paarerzeugung in externen Feldern? Ist der adiabatische Fall überhaupt realistisch? Mit einem einfachen Argument lässt sich diese Frage bejahen: Paarerzeugung kann entweder durch die Absorption *eines* Photons mit Energie  $E > 2m$  oder durch ein externes Feld geschehen. Ein externes Feld ist jedoch nichts anderes als eine Näherung für sehr viele Photonen niedriger Energie  $E \ll 2m$ . Paarerzeugung in externen Feldern bedeutet somit, dass ein Elektron negativer Energie sehr, sehr viele Photonen sehr, sehr niedriger Energie absorbieren muss, um ins positive Kontinuum angehoben zu werden. Vergegenwärtigt man sich, dass die Energie eine inverse Zeitskala angibt  $E \sim \frac{1}{T}$  und nimmt man als “natürliche” bzw. quantenmechanische Zeitskala die inverse Energie des energiereichen Photons  $E \approx 2m$ , ist offensichtlich: Paarerzeugung in externen Feldern ist auf der natürlichen Zeitskala ein sehr langsamer Prozess. Paarerzeugung in externen Feldern ist adiabatisch. Häufig wird als natürliche Zeitskala auch die elektronische

<sup>40</sup>Siehe [40] Abschnitt 8.5, Abschnitt 10.4.

<sup>41</sup>In diesem Abschnitt wird auf Einzelnachweise verzichtet. Die Darstellung folgt weitgehend den einführenden Bemerkungen in [24, 26]. Ein tieferes Verständnis der Zusammenhänge verdanke ich Gesprächen mit Detlef Dürr und Peter Pickl. Eine erste Formulierung der adiabatischen Paarerzeugung findet sich bei Nenciu [20, 21]. Nenciu formuliert das Problem im Rahmen der Streutheorie der zweiten Quantisierung und betrachtet nicht die Entwicklung eines konkreten Ein-Teilchen-Zustandes, wie sie durch die verallgemeinerten Eigenfunktionen gegeben ist.

Zeitskala gewählt, die durch die Comptonwellenlänge  $\lambda_c$  charakterisiert ist. Das Argument bleibt unverändert, da die Größenordnungen gleich sind ( $m = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ ).

Die zur Beschreibung der adiabatischen Paarerzeugung verwendete Ein-Teilchen-Dirac-Gleichung mit langsam veränderlichem externen Feld  $A_{ct} = \mathbb{I}A_0 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i$  (Elementarladung in Potential absorbiert) lautet:

$$i\partial_t \psi_t(\mathbf{x}) = (D_0 + A_{ct}(\mathbf{x})) \psi_t(\mathbf{x}) \quad (22)$$

Es werden zwei verschiedene Zeitskalen eingeführt: Die langsame makroskopische Zeitskala  $s$ , auf der sich das Potential ändert, und die schnelle mikroskopische bzw. quantenmechanische Zeitskala  $t$ . Die Verbindung zwischen ihnen ist durch den kleinen, sog. *adiabatischen Parameter*  $0 < \epsilon \ll 1$  gegeben:<sup>42</sup>

$$s = \epsilon t \quad (23)$$

Diese Festlegung definiert zugleich den Begriff “adiabatisch”: Die Verwendung dieses Begriffes ist zulässig, wenn für ein System gemäß (23) *zwei* Zeitskalen definiert werden können und sich der Dirac-Operator (hier: das Viererpotential  $A_{ct}(\mathbf{x})$ ) auf der *makroskopischen* Zeitskala ändert. Je kleiner  $\epsilon$  ist, desto langsamer ändert sich das System auf der mikroskopischen Zeitskala. Im Folgenden wird der adiabatische Limes  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$  betrachtet. Das Potential soll bei  $s \rightarrow \pm\infty$  Null sein.

Wie kommt es zur Paarerzeugung? Das kontinuierliche Spektrum des freien Dirac-Operators wird durch das externe Feld nicht verändert. Wegen des externen Feldes können jedoch zusätzliche gebundene, diskrete Zustände in der Energielücke existieren (siehe Abb. 2), deren Energieeigenwerte von der Stärke des Potentials abhängig sind. Bei stärker werdendem Potential tauchen sie aus dem Dirac-See auf und wandern langsam durch die Energielücke nach oben. Bei einem kritischen Wert des Potentials können sie eine “Energiebrücke” zwischen negativem und positivem Kontinuum aufbauen, d.h. gebundene Zustände tauchen in das positive Kontinuum ein. Wird das Potential adiabatisch ausgeschaltet, wandern die gebundenen Zustände zurück in das negative Kontinuum. Ein Elektron aus dem Dirac-See kann wie mit einem Aufzug über die Energiebrücke in das positive Kontinuum transportiert werden. Verbleibt das Elektron dauerhaft im positiven Kontinuum, d.h. ist der zurückkehrende gebundene Zustand unbesetzt, tritt Paarerzeugung auf.

Bevor adiabatische Paarerzeugung im Detail betrachtet wird, sollte eine nützliche Annahme getroffen werden: *Ausgangszustand des Systems ist das Vakuum, d.h. bei  $s \rightarrow -\infty$  ist der Dirac-See voll besetzt.* Mit dieser Annahme kann über einen einfachen Widerspruchsbeweis eine grundlegende Frage beantwortet werden: Wenn ein gebundener Zustand als Folge des angelegten Potentials aus dem See auftaucht, ist dieser überhaupt besetzt? Obige Annahme soll gelten. Der auftauchende gebundene Zustand sei unbesetzt. Da das Problem zeitumkehrinvariant ist, darf man den Zustand kurz nach dem Auftauchen “stoppen” und wieder “zurücklaufen” lassen. Taucht der unbesetzte, rückwärts laufende Zustand wieder in den See ein, erhält der Dirac-See *einen unbesetzten Zustand*. Dies widerspricht der Annahme, dass der Anfangszustand des Systems das Vakuum ist – der Zustand muss besetzt sein. Eine

<sup>42</sup>Siehe [39] Abschnitt 1.1. In [39] sind  $s$  und  $t$  in der Definition vertauscht.

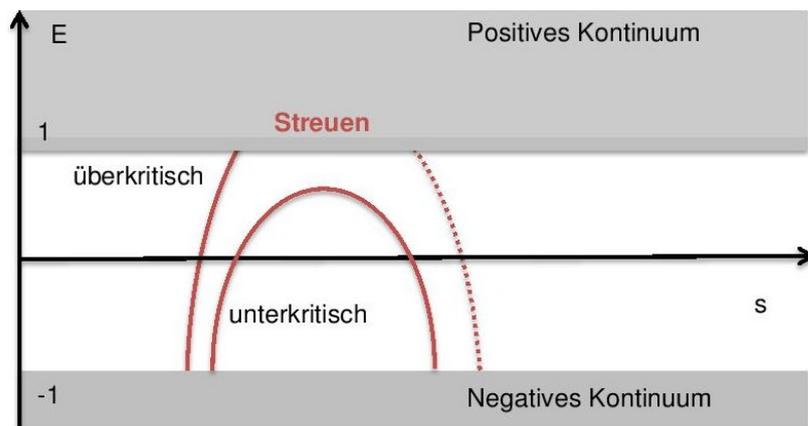


Abbildung 2: Adiabatische Paarerzeugung im Dirac–See-Bild: Es existieren gebundene Zustände in der Energielücke. Erreicht die Eigenwertkurve das pos. Kontinuum (überkritischer Fall), streut der Zustand dort und der zurückkehrende gebundene Zustand ist leer.

Einschränkung ist nötig: Die Argumentation gilt nur für Zeiten unmittelbar nach dem Auftauchen – dass der Zustand tatsächlich besetzt bleibt, muss eigens gezeigt werden.

Im adiabatischen Limes gibt es zwei scharf unterschiedene Fälle, die durch einen abrupten Sprung in der Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung bei einem kritischen Wert des Potentials differenziert sind (siehe Abb. 2):

Ist das Feld zu allen Zeiten *unterkritisch*, erreicht kein Eigenwert das positive Kontinuum. Es existiert immer eine Energielücke zwischen Eigenwertkurve und positivem Kontinuum. Das adiabatische Theorem findet Anwendung: Dieses besagt, dass das System im gebundenen Zustand verbleibt, wenn sich das Potential adiabatisch ändert und eine Energielücke zwischen dem Eigenwert des gebundenen Zustands und dem restlichen Spektrum existiert. Daher können die Zustände nicht in das positive Kontinuum “springen”, die besetzten Zustände folgen der Eigenwertkurve und kehren wieder in das negative Kontinuum zurück. Die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung ist Null.

Interessant ist der zweite Fall: Das Feld wird *überkritisch*, wenn der größte Eigenwert das positive Kontinuum erreicht und in dieses eintaucht. Der gebundene Zustand wird zu einem Kontinuumszustand. Dieser Zustand streut ins Unendliche “weg”, sodass zu dem Zeitpunkt, wenn das Potential wieder unterkritisch wird, die Wellenfunktion den Einflussbereich des Potentials vollständig verlassen hat. Der nach unten zurückwandernde gebundene Zustand bleibt leer. Taucht dieser unbesetzte Zustand in den Dirac–See ein, erhält der See ein zusätzliches Loch. Paarerzeugung geschieht mit Wahrscheinlichkeit Eins.

Der adiabatische Limes  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$  ist bei dieser Beschreibung von großer Bedeutung. Insbesondere sind der Fall  $\epsilon = 0$  und  $\epsilon \rightarrow 0$  qualitativ verschieden – ersteres beschreibt ein statisches Feld, in dem laut Abschnitt 2 keine Paarerzeugung möglich ist. Im adiabatischen Limes hingegen ist Paarerzeugung möglich. Zudem ist der *abrupte Übergang* zwischen dem unterkritischen Fall ohne Paarerzeugung und dem

überkritischen Fall, in dem Paarerzeugung mit Wahrscheinlichkeit Eins auftritt, nur im adiabatischen Limes zu beobachten. Für festes  $\epsilon \neq 0$  ist die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung eine kontinuierliche Funktion der Stärke des Potentials und auch im unterkritischen Fall ungleich Null. Weshalb?

Im unterkritischen Fall ist das durch die Zeitabhängigkeit des Potentials induzierte “Tunneln” der Zustände ausschlaggebend. Zur Veranschaulichung stelle man sich dazu die Eigenwertkurve nicht glatt, sondern aus kleinen Stufen zusammengesetzt vor. Auf jeder dieser Stufen kann ein kleiner Anteil der Wellenfunktion ins positive Kontinuum “tunneln”. Im adiabatischen Limes ist die Zeit zwischen den einzelnen Schritten so lang, dass die bereits getunnelten Anteile im positiven Kontinuum eine Zeitentwicklung durchlaufen und einen großen Phasenunterschied aufbauen, der zu destruktiver Interferenz führt. Werden die einzelnen Stufen rasch hintereinander erklimmt, bauen die getunnelten Anteile nur kleine Phasenunterschiede auf und interferieren konstruktiv – Paarerzeugung ist möglich.

Im überkritischen Fall ist die Geschwindigkeit des Streuens entscheidend. Ist das Potential zu stark zeitabhängig, kann die ins positive Kontinuum eingetauchte Wellenfunktion den Einflussbereich des Potentials nicht vollständig verlassen, bevor das Potential wieder unterkritisch wird. Ein Teil der Wellenfunktion folgt dem gebundenen Zustand zurück ins negative Kontinuum. Paarerzeugung geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner Eins. Je stärker das Potential wird, desto mehr Zeit bleibt zum Streuen – die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung nimmt zu. Im adiabatischen Limes hingegen ist selbst bei schwach überkritischen Potentialen die Zeitspanne ausreichend, dass die Wellenfunktion vollständig streuen kann.

Eine fundamentale Frage stellt sich noch: Die Formulierung von (22) impliziert, dass adiabatische Paarerzeugung als *Ein-Teilchen-Problem* behandelt werden kann – dies ist jedoch aufgrund der unendlich vielen Teilchen des Dirac–Sees nicht offensichtlich. Wieso kann adiabatische Paarerzeugung dennoch als Ein-Teilchen-Problem in einem externen Feld formuliert werden? Die grundlegende Idee ist, im Sinne der mean–field-Theorie die wechselwirkenden Seeteilchen in einem äußeren Feld durch nicht wechselwirkende Teilchen in einem “effektiven” Feld zu beschreiben, wobei letzteres mittlere Wechselwirkung und äußeres Feld enthält. So kann das Viel-Teilchen-Problem auf ein Ein-Teilchen-Problem reduziert werden: Für nicht wechselwirkende Teilchen sind die Bestandteile der Produktwellenfunktion des Sees (15) unabhängig und müssen je für sich genommen die Dirac–Gleichung erfüllen. Das externe Feld in (22) entspricht dem “effektiven” Feld; das von einem Experimentator tatsächlich angelegte äußere Feld ist das bzgl. des mittleren Wechselwirkungspotentials renormierte externe Feld. Eine solche mean field–Herangehensweise ist gerechtfertigt, wenn der Dirac–See äußerst homogen ist und nur vernachlässigbare Fluktuationen aufweist. Diese Voraussetzung ist erfüllt: Da es sich bei den Seeteilchen um Fermionen handelt, ist die Wellenfunktion des Sees antisymmetrisch. Die Teilchen vermeiden somit eine Zusammenballung an einem Ort. Fluktuationen der homogenen Verteilung sind stark unterdrückt und kleiner als die üblichen  $\sqrt{N}$ -Fluktuationen. Man geht von Fluktuationen der Ordnung  $\ln(N)$  aus. Die Teilchen können somit in guter Näherung als *nicht wechselwirkend* angenommen werden.

Obige Annahme wechselwirkungsfreier Teilchen in einem effektiven Feld ist

nicht nur eine theoretische Einsicht, sondern wird auch experimentell gestützt: In Halbleitern, deren (fast) voll besetztes Valenzband Ähnlichkeiten zum Dirac-See aufweist, verhalten sich die Elektronen im Leitungsband sowie die Quasiteilchen (“Löcher”) im Valenzband wie *freie* Teilchen mit von der Teilchenmasse abweichender effektiver Masse.

Die Annahme wechselwirkungsfreier Teilchen kann auch anhand eines Konzeptes aus der klassischen Mechanik veranschaulicht werden: Das Innere einer homogenen Massenschale ist kräftefrei, da sich die Kräfte auf ein Objekt im Innern in alle Richtungen exakt kompensieren. Ähnliches gilt für den Einfluss des Dirac-Sees: Die Teilchen des Dirac-Sees treten zwar untereinander und mit den realen Teilchen in Wechselwirkung, wegen der Homogenität und der unendlichen Ausdehnung des Dirac-Sees ist jedoch im Mittel *keine Wechselwirkung* festzustellen.

Eine letzte Frage stellt sich noch: Die durch das externe Feld erzeugten Teilchen “spüren” nach obigem Argument den Dirac-See nicht. Wie verhält es sich jedoch mit dem Coulomb-Feld der erzeugten Teilchen – müsste dieses nicht berücksichtigt werden? Hier hilft eine Betrachtung der Größenordnungen: Wie im Folgenden noch erläutert wird, wird für Paarerzeugung ein externes Coulomb-Feld einer Ladung  $Z \gtrsim 173$  benötigt. Im Vergleich zu diesem Feld ist das Coulomb-Feld der erzeugten Teilchen vernachlässigbar. Die Formulierung als Ein-Teilchen-Problem in einem externem Feld ist definitiv gerechtfertigt.

### 3.2 Mathematische Formulierung der adiabatischen Paarerzeugung

Nach der heuristischen Darstellung bedarf es nun einer mathematisch rigorosen Formulierung des Problems. Zur Notation: Im Folgenden wird zum Zweck der Übersichtlichkeit  $m = 1$  gesetzt.<sup>43</sup>

Wie bereits in 4.1 genannt, lautet die Dirac-Gleichung mit externem Feld:<sup>44</sup>

$$i\partial_t\psi_t(\mathbf{x}) = (D_0 + A_{ct}(\mathbf{x}))\psi_t(\mathbf{x}) \quad (24)$$

Unter Verwendung der makroskopischen Zeitskala  $s = ct$  ergibt sich:

$$i\partial_s\psi_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon}(D_0 + A(\mathbf{x})\mu(s))\psi_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon}D_{\mu(s)}\psi_s(\mathbf{x}) \quad (25)$$

Vereinfachend wird ein Potential gewählt, das sich in einen rein ortsabhängigen Teil  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  und einen rein zeitabhängigen “adiabatic switching factor”  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  faktorisieren lässt:

$$A_s(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mu(s) \quad (26)$$

Werden rein *elektrostatische* Potentiale betrachtet, ist nur  $A_0 \neq 0$  und  $A$  ein Vielfaches der Einheitsmatrix.<sup>45</sup>  $A$  soll *stetig* und *positiv* sein und einen *kompakten*

<sup>43</sup>Korrektweise werden neue Koordinaten eingeführt, die  $m, \hbar, c$  beinhalten, siehe [26].

<sup>44</sup>Siehe bis auf Weiteres [24, 26].

<sup>45</sup>Dieser Spezialfall wäre auch in zweiter Quantisierung formulierbar (siehe dafür [24]). Adiabatische Paarerzeugung kann jedoch auch für allgemeinere Potentiale gezeigt werden.

Träger  $\mathcal{S}_A$  besitzen,  $A, \nabla A$  sollen *beschränkt* sein.  $\mu$  soll *stetig differenzierbar*,  $\mu'$  *beschränkt* sein.  $s = 0$  sei der Zeitpunkt, zu dem das Potential *kritisch* wird, d.h. der Zeitpunkt, zu dem der größte Eigenwert den Rand des positiven Kontinuums erreicht. Für das kritische Potential wird festgelegt:

$$\mu(0) = 1 \text{ mit } \mu'(0) > 0 \quad (27)$$

Die an die Ableitung gestellte Bedingung garantiert, dass das Potential überkritisch wird bzw. die Eigenwertkurve in das positive Kontinuum eintaucht und dieses nicht nur tangiert. Zudem gelte  $\mu(s) = 0$  für  $s < s_i < 0$  und  $s > s_f > 0$ , d.h. das Potential wird zur Zeit  $s_i$  ein- und zur Zeit  $s_f$  ausgeschaltet. Es wird definiert, dass ein Potential genau dann *kritisch* ist, wenn Lösungen der Eigenwertgleichung für  $E = 1$  existieren.

$$(D_0 + A)\varphi = \varphi \quad (28)$$

Diese Lösungen können sowohl gebundene Zustände  $\Phi \in L^2$ , als auch Resonanzen, d.h.  $\varphi \notin L^2$ , sein.<sup>46</sup> Für die weitere Beschreibung wird angenommen, dass der Dirac-Operator *keine Resonanzen* bei  $E = 1$  besitzt. Diese Annahme ist typischerweise erfüllt. Der Eigenraum des (entarteten) Eigenwertes  $E = 1$  wird notiert als  $\mathcal{N} = \{\Phi \in L^2 : (D_0 + A - 1)\Phi = 0\}$ . Als vereinfachende Annahme wird gefordert, dass für  $\mu \in [0, 1 + \delta]$ ,  $\delta > 0$  maximal *ein* Eigenwert  $E_\mu$  des Operators  $D_\mu = D_0 + \mu A$  existiert, d.h. es befindet sich für einen festen Wert von  $\mu$  immer nur ein (entarteter) Eigenwert in der Energielücke.

Es wird der unitäre Zeitentwicklungsoperator  $U^\epsilon(s, s_0)$  definiert, der erfüllt:

$$i\partial_s U^\epsilon(s, s_0) = \frac{1}{\epsilon} D_{\mu(s)} U^\epsilon(s, s_0) \quad (29)$$

Mit dieser Definition lässt sich das Theorem für adiabatische Paarerzeugung im überkritischen Fall formulieren:<sup>47</sup>

**Theorem 2** *Sei  $\Phi_{\mu(s_0)}$  ein normierter gebundener Zustand von  $D_{\mu(s_0)}$  für  $s_0 \in (s_i, 0]$ . Sei  $U^\epsilon(s, s_0)$  die unitäre Zeitentwicklung, d.h.  $\psi_s^\epsilon = U^\epsilon(s, s_0)\Phi_{\mu(s_0)}$  löst (25) mit  $\psi_{s_0}^\epsilon = \Phi_{\mu(s_0)}$ . Dann gilt für alle  $\chi \in L^2$  und für alle  $s > 0$ :*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \psi_s^\epsilon, \chi \rangle = 0$$

Das bedeutet, dass ein Zustand  $\psi_s^\epsilon$ , der sich durch Anwenden des Zeitentwicklungsoperators aus einem gebundenen Zustand entwickelt, ab dem Zeitpunkt des Eintauchens in das positive Kontinuum *orthogonal zu allen gebundenen Zuständen* ist, da diese grundsätzlich  $L^2$ -Funktionen sind. Ein solcher Zustand kann bei Abschalten des Potentials, wenn eine zweite Eigenwertkurve zurück in den Dirac-See führt, dieser nicht folgen. Der Zustand wird dauerhaft im positiven Kontinuum verbleiben – er streut. Eine Stärke des Theorems besteht darin, dass die Aussage *für alle  $s > 0$*  gilt. Der Zustand streut *sofort* bei Eintauchen in das positive Kontinuum.

---

<sup>46</sup>Siehe [25, 26].

<sup>47</sup>Theorem 2.4 in [26].

Aus dem adiabatischen Theorem (siehe Abschnitt 3.3.1 für genauere Auseinandersetzung mit dieser Frage) folgt, dass im adiabatischen Limes ein aus dem Dirac–See auftauchender Zustand den gebundenen Zuständen folgt. Damit kann aus Theorem 2 folgender Schluss gezogen werden:<sup>48</sup>

**Korollar 1** *Es gelte Theorem 2. Dann gilt für alle  $s < s_i$*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \psi_s^\epsilon, P_0^- \psi_s^\epsilon \rangle = 1$$

und für alle  $s > s_f$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \psi_s^\epsilon, P_0^+ \psi_s^\epsilon \rangle = 1$$

Es existieren Zustände, die vor Einschalten des Potentials vollständig im negativen Kontinuum liegen, durch die Energiebrücke ins positive Kontinuum angehoben werden, dort streuen und dauerhaft vollständig im positiven Kontinuum verbleiben. Der zurückkehrende gebundene Zustand bleibt leer. Paarerzeugung findet mit Wahrscheinlichkeit 1 statt.

### 3.3 Zeitentwicklung der Wellenfunktion

Diese Aussage soll nun bewiesen oder im Rahmen dieser Arbeit zumindest motiviert werden. Dazu muss man die Zeitentwicklung einer beliebigen überkritischen Wellenfunktion kontrollieren (der unterkritische Fall ist durch das adiabatische Theorem abgedeckt). Diese zerfällt in zwei qualitativ unterschiedliche Regimes:<sup>49</sup> Für  $s \leq 0$  wird der Zustand adiabatisch den gebundenen Zuständen folgen, d.h. es muss gezeigt werden, dass der Zustand unbeschadet den Rand des positiven Kontinuums erreicht. Dies ist Gegenstand des adiabatischen Lemmas ohne Energielücke. Für  $s > 0$  soll der Zustand hingegen streuen und den Einflussbereich des Potentials schneller als  $\epsilon^{-1}$  auf der mikroskopischen Zeitskala verlassen, bevor das Potential wieder unterkritisch wird. Das Streuverhalten der Wellenfunktion kann mit Hilfe von verallgemeinerten Eigenfunktionen kontrolliert werden. Die weitere Darstellung wird sich auf den Streuvorgang konzentrieren. Das adiabatische Lemma ohne Energielücke wird ohne Beweis zitiert.

#### 3.3.1 Zeitentwicklung für $s \leq 0$ <sup>50</sup>

Dieser erste Beweisschritt beruht maßgeblich auf einer erweiterten Form des Zeitadiabatischen Theorems der Quantenmechanik, welches daher im Folgenden vorgestellt wird.<sup>51</sup>

---

<sup>48</sup>Korollar 2.5 aus [24].

<sup>49</sup>Siehe [26].

<sup>50</sup>Siehe [24, 26].

<sup>51</sup>Die Formulierung ist aus [39] Abschnitt 1.1 (siehe insbes. Def. / Aussagen (1.5) und (1.6)) übernommen. Dort findet sich ebenfalls eine stärkere Version des adiabatischen Theorems als die hier zitierte. Die Zeiten  $s$  und  $t$  sind in [39] genau umgekehrt definiert.

Sei der Hamilton-Operator  $H(\epsilon t) = H(s)$  auf der mikroskopischen Zeitskala langsam veränderlich. Voraussetzung für die Anwendung des adiabatischen Theorems ist die Existenz einer Teilmenge  $\sigma^*(s) \subset \sigma(s)$  des Spektrums von  $H(s)$ , die vom restlichen Spektrum zu allen Zeiten  $s$  durch eine Energielücke getrennt ist. In mathematisch exakter Formulierung bedeutet dies: Es existieren zwei stetige, beschränkte Funktionen  $f_+(s)$ ,  $f_-(s)$ , sodass gilt:

$$\sigma^*(s) \subset [f_-(s), f_+(s)] \quad \inf_{s \in \mathbb{R}} \text{dist}([f_-(s), f_+(s)], \sigma(s) \setminus \sigma^*(s)) > 0 \quad (30)$$

Definiert man den Projektor  $P^*(s)$  auf  $\sigma^*(s)$ , kann das adiabatische Theorem unter Verwendung der in Abschnitt 3.2 definierten Zeitentwicklung wie folgt formuliert werden: Es existiert eine Konstante  $C$ , sodass gilt:

$$\|(1 - P^*(s))U^\epsilon(s, s_0)P^*(s)\| \leq C\epsilon(1 + |s - s_0|) \quad (31)$$

Liegt der Zustand des Systems anfänglich im Unterraum  $P^*(s_0)\mathcal{H}$ , wird er unter der Zeitentwicklung fast vollständig in diesem verbleiben. Im vorliegenden Fall besagt das adiabatische Theorem, dass das System in seinem momentanen Eigenzustand verbleibt, wenn sich das externe Feld  $A_s$  adiabatisch ändert und es eine Lücke zwischen dem betrachteten Eigenwert und dem restlichen Spektrum des Dirac-Operators  $D_{\mu(s)}$  gibt.

Daraus folgt unmittelbar, dass eine Wellenfunktion  $\psi_s^\epsilon$  für  $s < 0$  bis auf einen Phasenfaktor mit den gebundenen Zuständen identisch ist. Der Fall  $s = 0$  ist hingegen *nicht* durch das adiabatische Theorem abgedeckt, da keine Energielücke zum positiven Spektrum mehr existiert. Es muss sichergestellt werden, dass der Zustand an der Kante noch immer ein *gebundener Zustand* ist, d.h. dass  $U^\epsilon(0, s_0)\psi_{s_0}^\epsilon$  ein Zustand in  $\mathcal{N} = \{\Phi \in L^2 : (D_0 + A - 1)\Phi = 0\}$  ist. Wegen der möglichen Entartung der gebundenen Zustände muss überprüft werden, dass die Eigenräume  $\mathcal{N}_\mu$  für beliebige Werte von  $\mu$  tatsächlich gegen  $\mathcal{N}$  konvergieren, d.h. für  $\mu$  nahe 1 muss  $\dim \mathcal{N} = \dim \mathcal{N}_\mu$  gelten. Die Konvergenz der gebundenen Zustände wird mit einer Reihe  $(\Phi_\mu)_\mu \subset \mathcal{N}_\mu$  kontrolliert, die gegen  $\Phi \in \mathcal{N}$  konvergiert. Ist diese Vorarbeit geleistet,<sup>52</sup> kann man das *adiabatische Lemma ohne Energielücke* herleiten.<sup>53</sup>

**Lemma 1** *Sei  $s < 0$  so gewählt, dass ein normierter, gebundener Zustand  $\Phi_{\mu(s)}$  von  $D_{\mu(s)}$  mit einer Energie  $E_{\mu(s)} > -1$  existiert. Dann gilt:*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|P_{\mathcal{N}}U^\epsilon(0, s)\Phi_{\mu(s)}\| = 1$$

$P_{\mathcal{N}}$  ist der Projektor auf  $\mathcal{N}$ . Das Lemma besagt, dass jeder gebundene Zustand von  $D_{\mu(s)}$  nach geeigneter Zeitentwicklung für  $s = 0$  in  $\mathcal{N}$  liegt. Insbesondere wird wegen des adiabatischen Theorems jeder Zustand  $U^\epsilon(0, s_0)\psi_{s_0}^\epsilon$  in  $\mathcal{N}$  liegen. An der Kante zum positiven Kontinuum ist der Zustand ein gebundener Zustand, eine  $L^2$ -Funktion.

<sup>52</sup>Siehe [26] für ausführliche Diskussion und Rechnung.

<sup>53</sup>Lemma 7.1 aus [26].

### 3.3.2 Verallgemeinerte Eigenfunktionen

Die Beschreibung des Streuvorgangs für  $s > 0$  basiert auf der Idee, die Wellenfunktion in Basisfunktionen zu entwickeln und das Streuverhalten der Basisfunktionen zu bestimmen. Die Konstruktion des Streuvorgangs geschieht unter Zuhilfenahme der verallgemeinerten Eigenfunktionen, welche die genannte Basis darstellen und in diesem Abschnitt eingeführt werden sollen. Die verallgemeinerten Eigenfunktionen bilden das Herzstück des Beweises von Theorem 2.

Die Relevanz der verallgemeinerten Eigenfunktionen übersteigt bei Weitem ihre Anwendung zum Beweis der adiabatischen Paarerzeugung. Die Idee ist einleuchtend: Statt sich bei einem Streuprozess auf Kenntnis des asymptotischen freien Anfangs- und Endzustandes zu beschränken, wird die tatsächliche Zeitentwicklung einer Wellenfunktion modelliert, die durch ihre Zerlegung in verallgemeinerte Eigenfunktionen bestimmt ist. Um ihre Relevanz zu verdeutlichen, sollen sie zunächst allgemein besprochen werden, bevor auf Paarerzeugung eingegangen wird.

#### Allgemeine Darstellung

Für einen freien Hamiltonoperator<sup>54</sup> (Schrödingeroperator, Dirac-Operator)  $H_0$  erfüllen die freien, "normalen" Eigenfunktionen  $\chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  die Eigenwertgleichung

$$H_0\chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = E\chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (32)$$

Sie haben die Form *ebener Wellen*  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  ( $\xi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  für den Dirac-Operator, wobei  $\xi$  ein Spinor ist) und diagonalisieren  $H_0$  über eine Fouriertransformation. Die Eigenfunktionen sind Elemente von  $L^\infty$ , jedoch nicht von  $L^2$ , da ebene Wellen nicht quadratintegrabel sind.

Analog werden die verallgemeinerten Eigenfunktionen  $\varphi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \in L^\infty$  definiert, die die Eigenwertgleichung des gestörten Differentialoperators  $H = H_0 + V(\mathbf{x})$  lösen:

$$H\varphi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = E\varphi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (33)$$

Auch sie diagonalisieren  $H$ , allerdings über eine *verallgemeinerte Fouriertransformation*, bei der die ebenen Wellen durch die verallgemeinerten Eigenfunktionen ersetzt werden. Zudem sind sie wie ebene Wellen auf Delta-Funktionen normiert. Die verallgemeinerten Eigenfunktionen übernehmen für den gestörten Hamiltonoperator somit die Funktion der ebenen Wellen für den freien Hamiltonoperator, ihre konkrete Form wird jedoch von ebenen Wellen abweichen. Die Bestimmung dieser Form bildet den Schlüssel zur Beschreibung des Streuprozesses.

Gleichung (33) kann formal gelöst werden durch:

$$\varphi_E^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (E - H_0 \pm i\delta)^{-1} V(\mathbf{x}) \varphi_E^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (34)$$

Der Term  $\pm i\delta$  wird wegen der singulären Natur des Operators  $(E - H_0)^{-1}$  eingefügt. Zur weiteren Bestimmung der Eigenfunktionen wird zunächst die Greensche Funktion  $G_E^\pm(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  von  $\lim_{\delta \rightarrow \infty} (E - H_0 \pm i\delta)^{-1}$  benötigt. Da das Potential räumlich

<sup>54</sup>Siehe [25], [7] Kapitel 16, [9].

begrenzt sein soll, ergibt sich zudem die Randbedingung,<sup>55</sup> dass die verallgemeinerten Eigenfunktionen für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  *asymptotisch die Form ebener Wellen*, genauer: die Form der Eigenfunktionen des *freien* Hamiltonoperators, annehmen sollen:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} [\varphi_E^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - \chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k})] = 0 \quad (35)$$

Als Lösung von (34) erhält man damit die Lippmann-Schwinger-Gleichung:

$$\varphi_E^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k}) + \int G_E^\pm(\mathbf{x} - \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') \varphi_E^\pm(\mathbf{x}', \mathbf{k}) d^3 x' \quad (36)$$

Um die Indizes  $\pm$  verständlich zu machen, ist ein Rückgriff auf die Wellenoperatoren<sup>56</sup> aus Abschnitt 1.4 angeraten: Es gilt:  $\varphi_E^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = W_\pm \chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ , d.h.  $\varphi^+$  beschreibt eine auslaufende,  $\varphi^-$  eine einlaufende Welle. Beide Varianten stellen eine Basis dar und führen zu äquivalenten Lösungen, erstere ist jedoch mathematisch einfacher zu behandeln. Im Folgenden wird daher nur noch  $\varphi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k}) := \varphi_E^+(\mathbf{x}, \mathbf{k})$  mit  $G_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}') := G_E^+(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  betrachtet.

Offensichtlich besitzen die verallgemeinerten Wellenfunktionen zwei Bestandteile: Ebene Wellen und einen Integralterm. Weit entfernt vom Potential haben die verallgemeinerten Eigenfunktionen die Form ebener Wellen, auf dem Träger des Potentials nehmen sie hingegen lokal eine gänzlich andere, durch die konkrete Wechselwirkung bestimmte Form an.<sup>57</sup> Interessant wird es, wenn der Integralterm die Entwicklung der Eigenfunktionen dominiert, ja wenn sogar die Situation  $|\int G_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') \varphi_E(\mathbf{x}', \mathbf{k}) d^3 x'| = |\varphi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - \chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k})| \gg |\chi_E(\mathbf{x}, \mathbf{k})|$  eintritt. In diesem Fall divergieren die verallgemeinerten Eigenfunktionen – sie werden nicht mehr im Geringsten ebenen Wellen gleichen. Dieser Fall wird uns bei der adiabatischen Paarerzeugung begegnen.

## Verallgemeinerte Eigenfunktionen des Dirac-Operators

Nach diesen allgemeinen Ausführungen kann man sich dem konkreten Problem der Paarerzeugung zuwenden. Alles oben dargelegte gilt unverändert, nur die Notation wird angepasst. Die verallgemeinerten Eigenfunktionen<sup>58</sup>  $\varphi_\mu(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) \in L^\infty$  des *zeitunabhängigen* Dirac-Operators<sup>59</sup>  $D_\mu = D_0 + \mu A(\mathbf{x})$  sind die Lösungen der zeitunabhängigen Eigenwertgleichung:

$$D_\mu \varphi_\mu(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) = \pm E_k \varphi_\mu(\mathbf{k}, j, \cdot) \quad E_k = \sqrt{k^2 + 1} \quad (37)$$

$j$  stellt einen kombinierten Spin- und Vorzeichenindex dar: Für  $j = 1, 2$  gilt das Vorzeichen “+”, für  $j = 3, 4$  das Vorzeichen “-”.  $\varphi_\mu(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) \in L^\infty$  ist die eindeutige Lösung von (37), unendlich oft stetig differenzierbar und Hölder-stetig. Die

<sup>55</sup>Siehe [7] Kapitel 16, [9].

<sup>56</sup>Siehe [7] Kapitel 16.

<sup>57</sup>Betrachtet man den Beispiel des  $\alpha$ -Zerfalls, wäre diese spezielle, nur lokal angenommene Form die Gamow-Funktion, siehe [9].

<sup>58</sup>Siehe bis auf Weiteres [24, 25, 26].

<sup>59</sup>In den im Folgenden viel verwendeten Quellen [25, 27, 28] wird ein allgemeines Potential der Form  $A_s(\mathbf{x})$  verwendet. Ich werde hingegen in Anlehnung an [24, 26] weiterhin mit einem separierbaren Potential  $\mu(s) A(\mathbf{x})$  arbeiten.

verallgemeinerten Eigenfunktionen definieren die oben genannte verallgemeinerte Fouriertransformation, mit der sich jede Wellenfunktion als Zerlegung in verallgemeinerte Eigenfunktionen darstellen lässt:

$$\mathcal{F}_\mu(\psi)(\mathbf{k}, j) = \int (2\pi)^{-3/2} \bar{\varphi}_\mu(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d^3x \quad (38)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 \int (2\pi)^{-3/2} \varphi_\mu(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) \mathcal{F}_\mu(\psi)(\mathbf{k}, j) d^3k \quad (39)$$

Im Folgenden wird der Spinindex weggelassen. Den obigen Ausführungen folgend ergibt sich als Lösung von (37) die Lippmann-Schwinger-Gleichung:

$$\varphi_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \int G_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mu A(\mathbf{x}') \varphi_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{x}') d^3x' \quad (40)$$

$\varphi_0(\mathbf{k}, \cdot)$  sind die Eigenfunktionen des freien Dirac-Operators mit  $\mu = 0$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ .

Zur Vereinfachung der Notation wird der Operator  $T_k : L^\infty \rightarrow \mathcal{B}$  eingeführt, wobei  $\mathcal{B} \subset L^\infty$  der Banach-Raum aller Funktionen ist, die für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen Null streben. Dies beinhaltet auch die gebundenen Zustände in der Energielücke.

$$T_k f(\mathbf{x}) = \int G_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') A(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d^3x' \quad (41)$$

Damit lässt sich (40) umschreiben zu:

$$(1 - \mu T_k) \varphi_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \quad (42)$$

Es lassen sich abhängig von der Energie folgende Aussagen über die verallgemeinerten Eigenfunktionen treffen:<sup>60</sup>

- Für  $E_k < 1$  hat die freie Dirac-Gleichung  $D_0 \varphi_0 = \pm E_k \varphi_0$  nur die triviale Lösung  $\varphi_0 = 0$ , da das Spektrum des freien Dirac-Operators diesen Energiebereich nicht enthält. Innerhalb der Energielücke ( $\mu < 0$ ) gilt für die verallgemeinerten Eigenfunktionen die reduzierte Gleichung

$$(1 - \mu T_k) \varphi_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = 0 \quad (43)$$

In diesem Fall ist  $\varphi_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \in \mathcal{B}$ . Dies entspricht – vereinfacht gesprochen, da  $L^2 \subset \mathcal{B}$  aber  $L^2 \neq \mathcal{B}$  – den gebundenen Zuständen  $\Phi_\mu$  (es gibt zusätzlich Lösungen, die nicht quadratintegabel sind, aber für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  gegen Null streben).

- Für  $E_k > 1$  ist  $\varphi_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \in L^\infty \setminus \mathcal{B}$  und es gilt (42).
- Für  $E_k = 1$  ( $\mu = 1$ ) sind prinzipiell beide Varianten möglich. Ein Potential ist jedoch genau dann als *kritisch* definiert, wenn der Zustand  $\varphi_1(\mathbf{0}, \mathbf{x})$  bei  $E = +1$  ein Element von  $\mathcal{B}$  ist.

---

<sup>60</sup>Siehe [25].

Es kann sich bei  $\varphi_1(\mathbf{0}, \mathbf{x})$  noch immer um einen gebundenen Zustand  $\Phi$  in  $L^2$  oder eine Resonanz in  $\mathcal{B} \setminus L^2$  handeln. Der Unterschied ist aus der Form des Zustandes ersichtlich: Der Zustand  $\varphi_1(\mathbf{0}, \mathbf{x})$  an der Kante lässt sich schreiben als

$$\varphi_1 = \varphi_1^1 + \frac{1}{x} \frac{1}{4\pi} \int (1 + \beta) A(\mathbf{x}') \varphi_1(\mathbf{x}') d^3 x' \quad (44)$$

$\varphi_1^1$  fällt mindestens so schnell wie  $x^{-2}$  ab, ist also quadratintegabel. Der zweite Teil fällt jedoch nur so schnell wie  $x^{-1}$  ab. Für gebundene Zustände  $\Phi \in \mathcal{N}$ , die ausschließlich behandelt werden sollen, muss das Integral Null ergeben. Es ergibt sich folgende Forderung an das Potential.<sup>61</sup>

$$\int (1 + \beta) A(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3 x = 0 \quad (45)$$

Mit dieser Vorarbeit kann das Verhalten der verallgemeinerten Eigenfunktionen im interessanten Regime für  $(\mu, \mathbf{k}) \approx (1, 0)$  mit  $\mu > 1$  (schwach überkritisch), d.h. nahe der Spektralkante, untersucht werden.<sup>62</sup> Da die verallgemeinerten Wellenfunktionen für  $\mu \leq 1$  den gebundenen Zuständen entsprechen, liegt die Vermutung nahe, dass sich die verallgemeinerten Eigenfunktionen im schwach überkritischen Fall nur wenig vom gebundenen Zustand  $\Phi$  mit  $E = 1$  unterscheiden werden. Für ein heuristisches Argument wird für  $(\mu, \mathbf{k}) \approx (1, 0)$  in führender Ordnung folgende Abschätzung getroffen:

$$\varphi_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \approx \eta_\mu(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{x}) \quad (46)$$

Da sich  $\Phi$  in der Form von Gleichung (43) als

$$(1 - T_0) \Phi = 0 \quad (47)$$

schreiben lässt ( $\mu = 1$ ) und somit in der Darstellung von  $\Phi$  die ebenen Wellen gänzlich fehlen, müssen auch auf der linken Seite von (46) die ebenen Wellen  $\varphi_0(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  vernachlässigbar werden bzw. betragsmäßig nicht ins Gewicht fallen. Da jedoch für  $\varphi_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  (42) gilt, müssen folglich das Integral in (40) und somit die verallgemeinerten Eigenfunktionen bzw.  $\eta_\mu(\mathbf{k})$  nahe der Kante des positiven Kontinuums *divergieren*. Die verallgemeinerten Eigenfunktionen sind nahe der Kante singulär.

Die Bestimmung der konkreten Form der verallgemeinerten Eigenfunktionen ist von großer Wichtigkeit, da diese maßgeblich das Streuverhalten des Zustandes bestimmt (siehe Abschnitt 3.3.3). Wie sieht die Divergenz der verallgemeinerten Eigenfunktionen?<sup>63</sup> Aus (46) und (42) folgt

$$(1 - \mu T_k) \eta_\mu(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{x}) \approx \varphi_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \quad (48)$$

Das Verhalten von  $\eta_{\mu(v)}(\mathbf{k})$  lässt sich aus dem Skalarprodukt mit  $A(\mathbf{x}) \Phi$  abschätzen:

$$\eta_\mu(\mathbf{k}) \langle (1 - \mu T_k) \Phi, A \Phi \rangle \approx \langle \varphi_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}), A \Phi \rangle \quad (49)$$

<sup>61</sup>Siehe [25].

<sup>62</sup>Siehe Argument in [27, 28].

<sup>63</sup>Siehe bis auf Weiteres [27, 28].

Auf beide Seiten wird eine Taylorentwicklung in  $k$  angewendet. Für die rechte Seite verschwindet der Term nullter Ordnung, da für die Eigenfunktion des freien Dirac-Operators mit  $E = 1$  gilt:

$$\varphi_0(0, \mathbf{x}) = D_0 \varphi_0(0, \mathbf{x}) = \beta \varphi_0(0, \mathbf{x}) = \frac{1 + \beta}{2} \varphi_0(0, \mathbf{x}) \quad (50)$$

Somit ist mit Bedingung (45) an das Potential

$$\langle \varphi_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}), A\Phi \rangle|_{k=0} = \frac{\varphi_0(0, \mathbf{x})}{2} \int (1 + \beta) A(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3x = 0 \quad (51)$$

Damit gilt:

$$\langle \varphi_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}), A\Phi \rangle = Ck + \mathcal{O}(k^2) \quad (52)$$

Auf der linken Seite wird der Operator  $T_k$  in  $k$  entwickelt. Es ergibt sich mit den Entwicklungskoeffizienten  $S_i^\mu$ :

$$\langle (1 - \mu T_k)\Phi, A\Phi \rangle \approx S_0^\mu + k S_1^\mu + k^2 S_2^\mu + k^3 S_3^\mu \quad (53)$$

Aus der Definition von  $T_k$  folgt  $\langle T_k \Phi, A\Phi \rangle = \langle A\Phi, T_k \Phi \rangle$ . Da zudem für den gebundenen Zustand mit  $E = 1$  nach (43)  $T_0 \Phi = \Phi$  gilt, kann unter Anwendung dieser Identität und der Vertauschungsrelation mit Wahl von  $\mu > 1$  (überkritisch) der Term nullter Ordnung geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} S_0^\mu &= \langle (1 - \mu T_0)\Phi, A\Phi \rangle = \langle (T_0 - \mu T_0)\Phi, A\Phi \rangle = \langle (A - \mu A)\Phi, T_0 \Phi \rangle \\ &= \langle (A - \mu A)\Phi, \Phi \rangle = -\|\sqrt{(\mu - 1)A}\Phi\|^2 = -C_0(\mu - 1) \end{aligned} \quad (54)$$

Für den Term erster Ordnung wird die Ableitung  $\partial_k T_k \Phi|_{k=0}$  benötigt. Aus Definition 41 ist ersichtlich, dass die Ableitung nur auf die Green'sche Funktion wirkt. Es kann gezeigt werden, dass  $\partial_k G_k|_{k=0} = 1 + \beta$ . Damit nimmt  $\partial_k T_k \Phi|_{k=0}$  die Form von (45) an und muss somit Null sein. Der lineare Term der Taylorentwicklung verschwindet.

Für die Divergenz der verallgemeinerten Eigenfunktionen ergibt sich:

$$\eta_\mu(\mathbf{k}) \approx -Ck \left( C_0(\mu - 1) + (C_2 + \mathcal{O}(\mu - 1))k^2 + (C_3 + \mathcal{O}(\mu - 1))k^3 \right)^{-1} \quad (55)$$

Eine genauere Aussage über die Konstanten  $C_2, C_3$  ist möglich, wenn man (55) für  $\mu < 1$  betrachtet. In diesem Fall muss  $k = i\kappa$  imaginär sein, da die zugehörigen Zustände in der Energielücke liegen, d.h.  $|E| < 1$ . Teilt man  $(1 - \mu T_k)\eta_\mu(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{x}) \approx \varphi_0(\mathbf{k}, \cdot)$  durch  $\eta_\mu(i\kappa)$ , und ersetzt  $\Phi \approx \Phi_\mu$  so ist die linke Seite gleich der von (43). Die rechte Seite muss somit Null ergeben, d.h.  $\eta_\mu(i\kappa) = \infty$  bzw. der Nenner von (55) muss Null sein:

$$C_0(\mu - 1) - (C_2 + \mathcal{O}(\mu - 1))\kappa^2 - i(C_3 + \mathcal{O}(\mu - 1))\kappa^3 = 0 \quad (56)$$

Dies ist für  $\mu < 1$  nur dann erfüllt, wenn  $C_2 < 0$  und  $C_3$  imaginär ist. Das Endergebnis für  $\eta_{\mu(v)}(\mathbf{k})$  lautet:

$$\eta_\mu(\mathbf{k}) \approx \frac{-Ck}{C_0(\mu - 1) - (|C_2| + \mathcal{O}(\mu - 1))k^2 - i(|C_3| + \mathcal{O}(\mu - 1))k^3} \quad (57)$$

Die verallgemeinerten Eigenfunktionen divergieren für  $(\mu, \mathbf{k}) \rightarrow (1, 0)$ . Für  $\mu$  nahe, aber ungleich Eins ist die Divergenz für Impulse  $k(\mu)$  mit  $C_0(\mu - 1) - |C_2|k(\mu)^2 = 0$  maximal.

Rigoros lässt sich eine obere Schranke für die Divergenz von  $\varphi_\mu(\mathbf{k}, j, \mathbf{x})$  und den Ableitungen der verallgemeinerten Eigenfunktionen mit Konstanten  $C_m$ ,  $\nu_l$  und  $n = \dim \mathcal{N}$  angeben, die recht gut mit obiger Abschätzung übereinstimmt:<sup>64</sup>

$$\|(1 + |\mathbf{x}|)^{-m} \varphi_\mu^{(m)}(\mathbf{k}, j, \mathbf{x})\|_\infty < C_m \left( k^{-m} + \left| \sum_{l=1}^n \frac{k}{|\mu - 1 - \nu_l k^2| + ck^3} \right|^{m+1} \right) \quad (58)$$

Dass mit den Abschätzungen (57) und (58) viel mehr erreicht ist als nur die Bestimmung der Form der Divergenz, wird im nächsten Abschnitt ersichtlich – tatsächlich hat man damit alle relevante Information über die Zeitentwicklung der Wellenfunktion erhalten.

### 3.3.3 Zeitentwicklung für $s > 0$

Nach dieser Vorarbeit kann der Streuvorgang behandelt werden. Jeder gebundene Zustand soll beim Eintauchen in das positive Kontinuum streuen, und zwar so schnell, dass er den Einflussbereich des Potentials  $\mathcal{S}_A$  verlassen hat, bevor das Potential wieder unterkritisch wird. Wie jedoch wird die Entwicklung eines gebundenen Zustands an der Kante des positiven Kontinuums bestimmt, wenn der Dirac-Operator selbst *zeitabhängig* ist? Hier zeigt sich der Wert der verallgemeinerten Eigenfunktionen: Mit ihnen kann das Verhalten jeder beliebigen Wellenfunktion für ein *stationäres, überkritisches* Potential kontrolliert werden. Dies stellt eine gute erste Abschätzung dar, da das reale Potential *adiabatisch* veränderlich ist. Der Vergleich von stationärer und echter Zeitentwicklung liefert die gesuchten Informationen über das Streuverhalten.

Das singuläre Verhalten der verallgemeinerten Eigenfunktionen erschwert diesen Schritt. Wieso? Das Streuverhalten einer beliebigen Wellenfunktion wird durch die Komponenten ihrer Fourierzerlegung, d.h. durch das Streuverhalten der Basisfunktionen, bestimmt. Normalerweise sind die Basisfunktionen ebene Wellen, deren Streuverhalten einfach zu beschreiben und deren Streugeschwindigkeit hoch ist. Aber aus obigem Argument ist ersichtlich, dass die verallgemeinerten Eigenfunktionen für kleine  $\mathbf{k}$  *keine ebenen Wellen* sind – das Streuverhalten wird qualitativ anders sein. Die kleinen Impulse, für die die verallgemeinerten Eigenfunktionen divergieren, sind besonders problematisch, da sie nur langsam streuen. Die Wellenfunktion wird lange im Einflussbereich des Potentials verweilen, ja es stellt sich die berechnete Frage, ob es überhaupt zu einer vollständigen Streuung kommt.

Bevor diese Frage beantwortet wird, muss eine kleine Änderung der Betrachtungsweise vorgenommen werden:<sup>65</sup> Bis jetzt wurde das Problem bei konstantem  $\mu$  betrachtet. Da  $\mu$  eigentlich zeitabhängig ist, ist dies äquivalent zur Betrachtung bei einer *festgehaltenen* makroskopischen Zeit  $s = v$ . Wie bereits eingeführt, ist das

---

<sup>64</sup>Siehe [26].

<sup>65</sup>Siehe [26].

Potential für  $v = 0$  kritisch. In der Formel für die Divergenz (57) darf  $\mu - 1$  durch  $v$  ersetzt werden (linearer Term einer Taylorentwicklung in der Zeit für  $v \approx 0$ , Vorfaktor wird in Konstanten in (57) absorbiert).

### Abschätzung des Streuverhaltens

Wie sieht das Streuverhalten einer Wellenfunktion an der Kante zum positiven Kontinuum für ein stationäres, überkritisches Potential aus? Die bisherigen Erkenntnisse zu den verallgemeinerten Eigenfunktionen reichen aus, um dieses zu untersuchen, da die Form der verallgemeinerten Eigenfunktionen alle wichtigen Informationen über das Streuverhalten des Zustandes beinhaltet. Weshalb ist dies der Fall?<sup>66</sup>

Für große Zeiten / Entfernungen befindet sich eine allgemeine, sich *frei* entwickelnde Wellenfunktion  $\psi$  typischerweise an den Orten  $\mathbf{x}$ , für die  $\frac{\mathbf{x}}{t}$  im Träger der Fouriertransformierten  $\hat{\psi}$  (FT zum Zeitpunkt  $t = 0$ ) liegt:

$$\psi(\mathbf{x}, t) \sim \hat{\psi}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right) \quad (59)$$

Die (bohmschen) Trajektorien  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  sind für große Zeiten *geradlinig*, d.h. die Geschwindigkeit des Teilchens darf als  $\mathbf{V}_t(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)}{t}$  definiert werden. Die Geschwindigkeit konvergiert gegen  $\mathbf{V}_\infty(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{V}_t(\mathbf{x})$ .  $\mathbf{V}_\infty$  ist  $|\hat{\psi}|^2$ -verteilt – es ist somit gerechtfertigt,  $|\hat{\psi}|^2$  als eine “Geschwindigkeits- / Impulsverteilung” des Teilchens zu bezeichnen. Die Identifikation von  $\frac{\mathbf{x}}{t}$  mit der Geschwindigkeit / dem “Impuls” ist möglich. Die Aussage von (59) ist nun klar: Da die Trajektorien asymptotisch gerade sind, kann ein Teilchen nur dann bei  $\mathbf{x}$  registriert werden, wenn es einen anfänglichen Impuls in Richtung  $\mathbf{x}$  mit Betrag  $\frac{x}{t}$  besitzt, d.h.  $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{x}}{t} \in \text{supp}(\hat{\psi})$  (in gewählten Einheiten). Die Impulsverteilung beinhaltet somit sämtliche Informationen über das Langzeitverhalten.

Es existiert eine einfache Veranschaulichung von Beziehung (59): Eine (nicht-relativistische) Materiewelle mit Dispersionsrelation  $\omega = k^2$  (in gew. Einheiten) ist eine Superposition von Wellen unterschiedlicher Wellenvektoren. Die einzelnen Bestandteile der Welle werden sich mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten  $v_{ph} = \frac{\omega}{k} = k$  fortbewegen. Das Wellenpaket zerläuft und spaltet sich in seine Bestandteile zu unterschiedlichen  $k$ -Werten auf. Die Zeitentwicklung trennt die verschiedenen  $k$ -Werte und stellt somit eine Art Fouriertransformation dar.

All dies lässt sich auf obiges Streuproblem übertragen, bei dem das Streuverhalten des gebundenen Zustandes  $\Phi$  an der Kante des positiven Kontinuums untersucht werden soll. Die gestreute Wellenfunktion  $\Phi(t)$  gleicht laut  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-iD_0 t} \Phi - e^{-iD_0 t} \Phi_f\| = 0$  asymptotisch der Wellenfunktion des sich *frei* entwickelnden Endzustandes  $\Phi_f$ . Für  $\Phi_f$  muss folglich (59) gelten. Daher gilt für große  $t$  bzw.  $x$ :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \sim \hat{\Phi}_f\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right) \quad (60)$$

---

<sup>66</sup>Siehe [7] Kapitel 9, 15, 16.

Die (normale) Fouriertransformierte  $\hat{\Phi}_{f,\mu(v)}(\mathbf{k})$  ist identisch mit der verallgemeinerten Fouriertransformation von  $\Phi$ .<sup>67</sup> Mit der Näherung (46) für die verallgemeinerten Eigenfunktionen gilt:

$$\hat{\Phi}_{f,\mu(v)}(\mathbf{k}) = \int (2\pi)^{-3/2} \Phi(\mathbf{x}) \bar{\varphi}_{\mu(v)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) d^3x \approx (2\pi)^{-3/2} \bar{\eta}_{\mu(v)}(\mathbf{k}) \quad (61)$$

$v$  ist so gewählt, dass das Potential nur schwach überkritisch ist ( $v \approx 0$ ,  $v > 0$ ). Die relevante Zeitspanne für den Streuvorgang kann zu  $\mathcal{O}(\epsilon^{1/3})$  bestimmt werden (siehe unten).

Für ein stationäres, schwach überkritisches Potential ist der gestreute Zustand durch das komplex Konjugierte der bekannten Größe  $\eta_{\mu(v)}(\mathbf{k})$  gegeben. Die Impulsverteilung des gestreuten Elektrons ist durch  $|\hat{\Phi}_{f,\mu(v)}(\mathbf{k})|^2 \approx (2\pi)^{-3} |\eta_{\mu(v)}(\mathbf{k})|^2$  gegeben. Mit der genauen Kenntnis der verallgemeinerten Eigenfunktionen bzw. von  $\eta_{\mu(v)}(\mathbf{k})$  ist das Langzeitverhalten der Wellenfunktion bekannt – die verallgemeinerten Eigenfunktionen codieren das gesamte Streuverhalten.

### Abschätzung der Streuzeit

Dass die Wellenfunktion rasch genug streut, sodass Paarerzeugung im überkritischen Fall mit Wahrscheinlichkeit 1 geschieht, ist jedoch aus dem Langzeitverhalten nicht direkt ersichtlich. Problematisch ist insbesondere die Divergenz der verallgemeinerten Eigenfunktionen für kleine Impulse nahe der Spektralkante, da diese sehr langsames Streuen der Wellenfunktion bedingt. Es werden Informationen zur Streuzeit benötigt, um abschätzen zu können, wie rasch der Zustand den Einflussbereich des Potentials verlässt.<sup>68</sup>

Dazu wird die Zeitentwicklung des gebundenen Zustandes  $\Phi$  unter dem *zeitunabhängigen* Dirac-Operator  $D_{\mu(v)}$  untersucht, der die Hilfszeitentwicklung  $V_{\mu(v)}$  mit

$$i\partial_s V_{\mu(v)}(s, 0) = \frac{1}{\epsilon} D_{\mu(v)} V_{\mu(v)}(s, 0) \quad (62)$$

erzeugt. Angewendet auf  $\Phi$  gilt:

$$\begin{aligned} V_{\mu(v)}(s, 0)\Phi &= e^{-i\frac{s}{\epsilon} D_{\mu(v)}} \Phi \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\frac{s}{\epsilon}(1+\frac{k^2}{2})} \hat{\Phi}_{f,\mu(v)}(\mathbf{k}) \varphi_{\mu(v)}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) d^3k \\ &= -\frac{i\epsilon}{s} \int e^{-i\frac{s}{\epsilon}(1+\frac{k^2}{2})} \partial_k (|\hat{\Phi}_{f,\mu(v)}(\mathbf{k})|^2 \Phi(\mathbf{x}) k) d\Omega dk \end{aligned} \quad (63)$$

Die erste Umformung folgt aus der Taylorentwicklung  $\sqrt{1+k^2} \approx 1 + \frac{k^2}{2}$  und dem Einsetzen von Näherung (46) unter Beachtung von (61), der zweite Schritt ist eine partielle Integration. Da  $\Phi$  keine Impulsabhängigkeit aufweist, muss nur  $\partial_k (|\hat{\Phi}_{f,\mu(v)}(\mathbf{k})|^2 k)$  ausgewertet werden. Zur Abschätzung des Terms wird verwendet, dass die Form von  $\eta_{\mu(v)}$  bekannt ist: Diese hat ein scharfes Maximum bei einem Wert  $\tilde{k}_{\mu(v)} = \mathcal{O}(\sqrt{v})$  mit einer Breite  $\Delta_{\mu(v)} = \mathcal{O}(v)$ .<sup>69</sup> Damit kann für die

<sup>67</sup>Siehe [27, 28].

<sup>68</sup>Siehe bis auf Weiteres [27, 28].

<sup>69</sup>Die Breite ist gegeben durch  $\eta_{\mu(v)}(\tilde{k} \pm \Delta) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_{\mu(v)}(\tilde{k})$ . Das Maximum der Verteilung für  $v \neq 0$ , aber nahe 0, wird angenommen, wenn  $C_0 v - |C_2| \tilde{k}^2 = 0$ , d.h.  $\tilde{k}_{\mu(v)} = \mathcal{O}(\sqrt{v})$ . Daraus kann auch die Breite bestimmt werden. Siehe [28].

Ableitung der Fouriertransformierten die grobe Abschätzung

$$|\partial_k \hat{\Phi}_{f,\mu(v)}(\mathbf{k})| < \frac{\hat{\Phi}_{f,\mu(v)}(\tilde{k}_{\mu(v)})}{\Delta_{\mu(v)}} \quad (64)$$

getroffen werden. Unter der Annahme  $\Delta \ll \tilde{k}$  und mit  $d\Omega dk = \frac{d^3 k}{k^2}$  ergibt sich die Abschätzung:

$$|\partial_k (|\hat{\Phi}_{f,\mu(v)}|^2 k)| d\Omega dk \approx |\hat{\Phi}_{f,\mu(v)}|^2 \frac{2}{\Delta_{\mu(v)} \tilde{k}_{\mu(v)}} d^3 k \quad (65)$$

Eingesetzt in obige Zeitentwicklung führt dies zu:

$$|V_{\mu(v)}(s, 0)\Phi| \leq \frac{2}{\Delta_{\mu(v)} \tilde{k}_{\mu(v)}} \frac{\epsilon}{s} |\Phi(x)| \int |\hat{\Phi}_{f,\mu(v)}|^2 d^3 k \quad (66)$$

Die entscheidende Frage ist: Wie lange dauert es, bis der gebundene Zustand  $\Phi$  den Einflussbereich des Potentials verlassen hat? Eine Abschätzung für die Streuzeit  $s_d$  ergibt sich aus  $|\langle V_{\mu(s_d)}(s_d, 0)\Phi, \Phi \rangle| \approx \frac{1}{2} = \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon})$ . Da das Integral 1 ergibt und  $\Phi$  normiert ist, kann die Streuzeit bestimmt werden zu:

$$s_d \approx \frac{4\epsilon}{\tilde{k}_{\mu(v)} \Delta_{\mu(v)}} \propto \frac{4\epsilon}{v^{3/2}} \quad (67)$$

Bisher wurde vereinfacht eine *stationäre* Zeitentwicklung betrachtet – das System wird zur Zeit  $v$  “eingefroren”. Das faktisch zu betrachtende, reale System verhält sich jedoch anders: Der Dirac-Operator bzw. das Potential ist zeitabhängig, die Stärke des Potentials ändert sich kontinuierlich. Die bisherigen Rechnungen sind dennoch brauchbar: Für eine erste Abschätzung kann die echte Zeitentwicklung  $U^\epsilon(s, 0)$  durch die stationäre Hilfszeitentwicklung  $V_{\mu(v)}(s, 0)$  genähert werden. Zu klären ist die Frage, zu welcher Zeit  $v$  das System “eingefroren” werden soll. Es wird  $v = s_d$  gewählt. Damit wird die Streuzeit zu  $s_d \propto \epsilon^{2/5}$  auf der makroskopischen Skala bestimmt. Dies ist eine recht gute Abschätzung: Rigorose Beweisführung ergibt, dass ein Zustand an der Kante des positiven Kontinuums in makroskopischen Zeiten der Ordnung  $s_d \propto \epsilon^{1/3}$  bzw. der mikroskopischen Zeit  $t_d = \frac{s_d}{\epsilon} \sim \epsilon^{-2/3}$  streut. Dieses sehr langsame Streuverhalten ist Folge der Divergenz der Eigenfunktionen nahe der Kante des positiven Kontinuums – eine normale  $L^2$ -Funktion, die sich in ebene Wellen entwickeln lässt, hat Streuzeiten der Größenordnung  $\epsilon$  auf der makroskopischen, 1 auf der mikroskopischen Skala. Trotzdem ist dies ein ausgezeichnetes Ergebnis: Das Potential  $A_s$  ist adiabatisch veränderlich, d.h.  $\epsilon \ll 1$ , und wird sich nur für makroskopische Zeiten der Größenordnung 1 bzw. mikroskopische Zeiten der Größenordnung  $\epsilon^{-1}$  merklich ändern. Ein schwach überkritisches Potential könnte frühestens nach Verstreichen dieser Zeit wieder unterkritisch werden – zu diesem Zeitpunkt hat die Wellenfunktion bereits vollständig gestreut.

Die Tatsache, dass das Potential sich *adiabatisch* ändert, rechtfertigt zugleich, dass die bisher auf Grundlage eines stationären Potentials getroffenen Abschätzungen auf das tatsächlich vorliegende, zeitabhängige Problem übertragbar sind. Der Streuvorgang geschieht näherungsweise in einem stationären Potential, da der

Zustand den Einflussbereich des Potentials bereits verlassen hat, bevor dieses sich merklich ändert. Somit hat z.B. (61) auch für die reale Zeitentwicklung Bestand. Möchte man hingegen die Impulsverteilung des erzeugten *Positrons* bestimmen,<sup>70</sup> ist diese *nicht* durch  $|\hat{\Phi}_{f,\mu(v)}(\mathbf{k})|^2 \approx (2\pi)^3 |\eta_{\mu(v)}(\mathbf{k})|^2$  gegeben, da sich das Potential – obwohl es adiabatisch ist – bis zur Erzeugung des Positrons maßgeblich verändert hat. In diesem Fall muss explizit untersucht werden, wie sich (61) abhängig vom Potential ändert.

Die getroffenen Abschätzungen reichen somit aus, um das Streuen der Wellenfunktion auch für das zeitabhängige Problem nachzuweisen. Der rigorose Beweis, der im *Anhang A.2* skizziert ist, basiert auf dem gleichen Vorgehen wie bisher: Mit den verallgemeinerten Eigenfunktionen wird die Zeitentwicklung der Wellenfunktion für *statische, überkritische* Potentiale kontrolliert. Die reale Zeitentwicklung kann aus dem Vergleich mit der stationären Hilfsentwicklung abgeschätzt werden. Diese Abschätzung muss allerdings genauer erfolgen als im bisherigen heuristischen Argument. Insbesondere muss untersucht werden, zu welcher Zeit  $v$  das Potential “eingefroren” werden sollte. Weiterhin müssen kleine Impulswerte getrennt betrachtet werden, da die Anteile der Wellenfunktion mit kleinen Impulsen langsam streuen und diese somit das vollständige Streuen der Wellenfunktion verhindern könnten. Für den Beweis wird die Beschreibung in zwei Bereiche getrennt: Es wird eine makroskopische Zeit  $\sigma$  der Ordnung 1 eingeführt, die näherungsweise die Zeit angibt, nach deren Verstreichen die Wellenfunktion den Einflussbereich des Potentials vollständig verlassen hat. Für  $s \leq \sigma$  muss gezeigt werden, dass die Wellenfunktion  $\mathcal{S}_A$  verlässt, für  $s > \sigma$  sichergestellt werden, dass kein Anteil der Wellenfunktion wieder in den Einflussbereich zurückkehrt. Letzteres ist nötig, da bei der ersten Abschätzung ein nicht zu vernachlässigender Fehler gemacht wird, der zunächst “mit der Wellenfunktion streut”. Es muss überprüft werden, dass dieser Fehler nicht zu einem späteren Zeitpunkt “zurückkehrt”. Der rigorose Beweis ist im Anhang skizziert, da er zwar technisch sehr interessant ist, jedoch keine wichtigen neuen Einsichten mit sich bringt. Zentrale Beweisidee ist und bleibt die Verwendung der verallgemeinerten Eigenfunktionen.

Damit ist die Aussage des zentralen Theorems gezeigt: Im adiabatischen Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  streut die Wellenfunktion in einem überkritischen Potential für alle Zeiten  $s > 0$ . Wird das Potential wieder unterkritisch, hat die Wellenfunktion längst den Einflussbereich des Potentials verlassen. Ein Elektron ist ins Unendliche “weggelaufen”. Der zurückkehrende gebundene Zustand ist unbesetzt. Bei Eintauchen in das negative Kontinuum entsteht im Dirac–See ein zusätzliches Loch, das Positron. Paarerzeugung findet mit Wahrscheinlichkeit 1 statt.

## 4 Ausblick: Experimentelle Realisierung

Theoretisch ist adiabatische Paarerzeugung gezeigt. Gibt es Möglichkeiten, diese auch experimentell zu beobachten? Zwei Bedingungen müssen an das System gestellt werden: Erstens ein adiabatisch veränderliches Potential, zweitens eine Ener-

---

<sup>70</sup>Siehe [28]

giebrücke, über die Zustände aus dem negativen in das positive Kontinuum angehoben werden können. Zwei Methoden werden in der einschlägigen Literatur genannt: Schwerionenstöße und starke Laserfelder. Bei ersterer ist jedoch Paarerzeugung im Bereich des experimentell Machbaren exponentiell unterdrückt, der zweite Vorschlag ist nicht umsetzbar, da entgegen der weit verbreiteten Meinung Paarerzeugung in Laserfeldern nicht möglich ist. Beide Methoden sollen dennoch kurz vorgestellt werden, bevor auf eine mögliche Alternative eingegangen wird.

## 4.1 Schwerionenstöße

Man stelle sich den – rein hypothetischen – Fall eines Atomkerns vor, dessen Ladung kontinuierlich erhöht wird.<sup>71</sup> Die Bindungsenergie der Elektronen nimmt mit zunehmender Kernladung immer weiter zu (betragsmäßig von der Unterkante des positiven Kontinuums gerechnet), die gebundenen Zustände wandern in der Energielücke in Richtung des negativen Kontinuums. Für einen punktförmigen Kern können ab einer Kernladungszahl von  $Z > 137$  keine 1s-Zustände mehr existieren, da die Bindungsenergie  $E_{1s} = m\sqrt{1 - Z^2\alpha^2}$  imaginär wird. Das Elektron “fällt in den Kern”. Betrachtet man den realistischeren Fall eines ausgedehnten Kerns, lassen sich die gebundenen Zustände bis zu dem Punkt verfolgen, an dem sie in das negative Kontinuum eintauchen. Das Eintauchen geschieht bei einer kritischen Kernladungszahl  $Z_{cr} \sim 173$ . Ist der eintauchende gebundene 1s-Zustand leer, tritt Paarerzeugung auf (siehe Abb. 3): Der leere Zustand wird von einem Elektron aus dem Dirac-See aufgefüllt, das beim Atom lokalisiert bleibt, ein Positron streut weg. Wegen des Pauli-Prinzips entstehen zwei Teilchen-Antiteilchen-Paare. Ähnlich einem Phasenübergang zerfällt das neutrale Vakuum in ein “geladenes Vakuum”, das Teilchen und Antiteilchen enthält und den neuen Grundzustand des Systems bildet. Wird die Kernladung weiter erhöht, bis die Zustände des 2p-Niveaus eintauchen, entstehen weitere Teilchen-Antiteilchen-Paare.

Eine Energiebrücke existiert – aber eine adiabatische Erhöhung der Kernladungszahl eines Kerns ist natürlich Unsinn. Wie kann das Ergebnis dennoch verwendet werden? Ein erstes Problem ist die Tatsache, dass Uran mit  $Z = 92$  das schwerste stabile Element ist. Es ist unmöglich, Kerne mit überkritischer Kernladungszahl zu erzeugen, bei denen nach Ionisierung der 1s-Schale direkt Paarerzeugung beobachtet werden könnte. Einen Ausweg bieten Kollisionen von schweren Atomkernen mit  $Z_1 + Z_2 > Z_{cr}$ :<sup>72</sup> Wenn sich die Atomkerne näher als ca.  $r \sim \frac{\hbar}{mc} \sim 3,7 \times 10^{-13}m$  kommen, spürt das Elektron nicht mehr die Ladungen der einzelnen Atomkerne, sondern verhält sich wie im Feld einer Ladung  $Z = Z_1 + Z_2$ . Es entsteht für einen Zeitraum von ca.  $10^{-21}$  Sekunden ein “Quasimolekül” mit überkritischer Ladung.

Der Vorgang ist adiabatisch bzw. quasistatisch: Die Ionen müssen ausreichende Energie besitzen, um ihre gegenseitige Coulombbarriere zu überwinden, wegen ihrer großen Masse liegen die benötigten Geschwindigkeiten jedoch maximal im Bereich von  $0,1c$ . Die Elektronen der s-Schale hingegen haben Geschwindigkeiten nahe der

<sup>71</sup>Siehe bis auf Weiteres [11, 12, 29].

<sup>72</sup>Siehe bis auf Weiteres [10, 11, 12, 29].

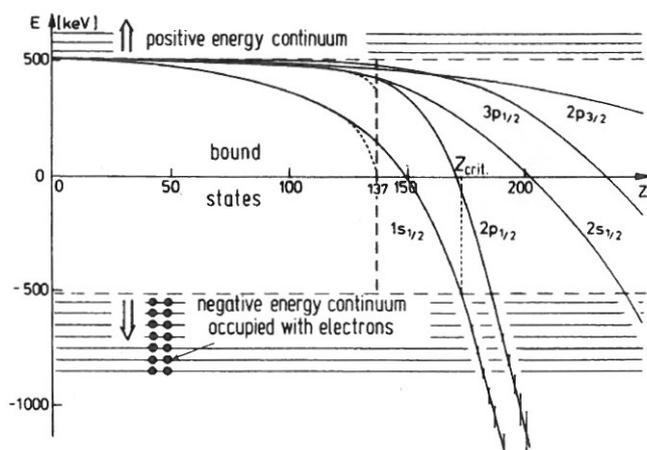


Abbildung 3: Bei zunehmender Kernladung nimmt die Bindungsenergie der Elektronen zu. Taucht ein unbesetzter  $1s$ -Zustand bei  $Z_{cr} \sim 173$  in das negative Kontinuum ein, kommt es zur Paarerzeugung. Quelle: [12], S. 5.

Lichtgeschwindigkeit. Der adiabatische Parameter lässt sich somit ungefähr zu  $\epsilon \sim 0,1$  abschätzen.<sup>73</sup> Beide Forderungen – adiabatisches Potential und Energiebrücke – sind erfüllt.

Dennoch gibt es ein Problem: Popov konnte zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung davon abhängig ist, wie stark überkritisch die kombinierte Ladung der Ionen ist. Für den experimentell am ehesten realisierbaren Fall  $Z_1 + Z_2 - Z_{cr} \ll Z_{cr}$  ergibt sich eine exponentielle Unterdrückung der Paarerzeugung. Wegen der geringen Wahrscheinlichkeit und der kurzen Existenz der Quasimoleküle während des Stoßes, d.h. der kurzen Dauer des überkritischen Potentials, ist die Beobachtung von Paarerzeugung bei Schwerionenstößen unwahrscheinlich, da – falls überhaupt – nur wenige Paare erzeugt werden.<sup>74</sup>

## 4.2 Paarerzeugung in Laserfeldern?

Adiabatische Paarerzeugung in Laserfeldern ist entgegen der weit verbreiteten Meinung nicht möglich, da keine Energiebrücke existiert. Dabei wirkt das System auf den ersten Blick gut geeignet: Der adiabatische Parameter ergibt sich aus dem Vergleich der Compton-Wellenlänge  $\lambda_c$ , die ein Maß für die elektronische Zeitskala darstellt, und der Wellenlänge des Lasers (makroskopische Zeitskala) zu  $\epsilon \sim 10^{-6}$ .<sup>75</sup>

Häufig wird angenommen, dass neue Laser (X-Ray Free Electron lasers) so hohe Feldstärken erzeugen könnten, dass Paarerzeugung beobachtet werden kann. Diese Meinung stützt sich auf die Arbeiten von Schwinger (siehe Abschnitt 2 und Anhang A.1), der für räumlich und zeitlich konstante elektrische Felder eine exponentielle Unterdrückung der Paarerzeugung berechnete und als kritische Feldstärke für die experimentelle Beobachtung von Paarerzeugung die Größenordnung

<sup>73</sup>Siehe [11, 27].

<sup>74</sup>Siehe [27, 29].

<sup>75</sup>Siehe [27].

$E \sim 10^{16} \frac{V}{cm}$  angab. In einer späteren Rechnung von Brezin und Itzykson<sup>76</sup> wurde seine Rechnung auf zeitlich oszillierende, aber weiterhin räumlich konstante und rein elektrische Felder ausgedehnt. Brezin und Itzykson bestätigten die Gültigkeit von Schwingers Ergebnis auch für diese Konfiguration: “[T]he estimates based on his calculation are totally adequate (...)”<sup>77</sup> und stellten fest, dass die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung nur unerheblich von der Frequenz des Feldes, maßgeblich hingegen von der maximalen erreichten E-Feldstärke bestimmt wird. Die Rechnung an sich ist nicht in Zweifel zu ziehen, jedoch ihre häufig angenommene und von Brezin und Itzykson selbst behauptete Übertragbarkeit auf Laserfelder.

Einige Einwände sind möglich: Ist ein ausgedehntes, rein elektrisches Feld ein sinnvolles Modell für einen Laser? Müsste nicht die Geometrie des Problems berücksichtigt werden? Im Paper heißt es dazu: “In spite of the slightly unrealistic character of this assumption, we expect that it retains the main features of a more general situation (...) if the rate predicted by pair creation were more favourable, one should pay more attention to the particular geometrical characterization.”<sup>78</sup> Darf insbesondere der – existierende – magnetische Bestandteil des Laserfeldes vernachlässigt werden? Hier wird – ohne ausführliche Begründung – angegeben, dass *reine* Magnetfelder keine Paare erzeugen können und somit der magnetische Bestandteil eines Laserfeldes keine Bedeutung für Paarerzeugung besitze.

Die Argumentation zeigt ein grundsätzliches Missverständnis auf:<sup>79</sup> Als relevant für Paarerzeugung wird das *lokale* Verhalten der *E- / B-Felder* angenommen, insbesondere die maximalen Feldstärken. In die Dirac-Gleichung geht jedoch nur das *Viererpotential*  $A$  ein. Entscheidend sind die *globalen* Eigenschaften des Potentials, insbesondere dessen exakte Orts- und Zeitabhängigkeit. Potentiale, nicht Felder, sind die fundamentalen Größen der Quantenmechanik. Paarerzeugung wird von der Existenz und dem Verhalten gebundener Zustände des Potentials bestimmt. Über- und unterkritische Potentiale unterscheiden sich qualitativ – die maximalen Feldstärken der durch sie erzeugten E- / B-Felder könnten hingegen vergleichbar sein. Aus der richtigen<sup>80</sup> Feststellung, dass in einem reinen Magnetfeld keine Paarerzeugung auftritt, sollte zudem nicht der Schluss gezogen werden, dass der magnetische Anteil eines beliebigen elektromagnetischen Feldes vernachlässigt werden darf, da dies das Viererpotential maßgeblich verändert.

Die zentrale Frage lautet: Erzeugt das Viererpotential eines Laserfeldes eine Energiebrücke?<sup>81</sup> Das elektrische Feld eines Lasers ist kein Gradient eines elektrischen Potentials, d.h.  $A_0 = 0$  in Coulomb-Eichung. Der elektrische Anteil des Laserfeldes kann also – im Gegensatz zur Argumentation von Brezin und Itzykson

---

<sup>76</sup>Siehe [3].

<sup>77</sup>[3], S. 1191.

<sup>78</sup>[3], S. 1192.

<sup>79</sup>Siehe [27].

<sup>80</sup>Die Behauptung ist nicht ganz richtig. Die Feststellung trifft nur in der Näherung des externen Feldes zu. Berücksichtigt man das anomale magnetische Moment des Elektrons, ist Paarerzeugung auch in konstanten Magnetfeldern möglich, da durch die Selbstwechselwirkung gebundene Zustände in der Energielücke entstehen. Die Feldstärken liegen jedoch um einige Größenordnungen über  $H_{cr} = E_{cr}$ , wobei  $E_{cr}$  der von Schwinger angegebene Wert ist. Siehe [22].

<sup>81</sup>Siehe [27].

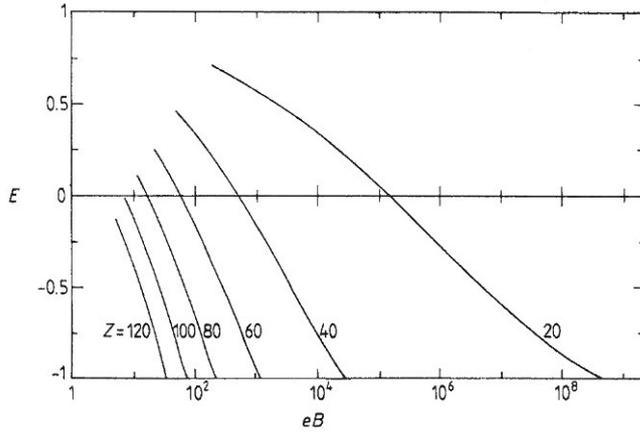


Abbildung 4: Energie der gebundenen Zustände der 1s-Elektronen mit externem Magnetfeld ( $m = 1$ ).  $eB = 1 \triangleq 4.41405 \times 10^{13}G$ . Quelle: [36], S. 1694.

– sicher nicht für Paarerzeugung verantwortlich sein. Die magnetischen Anteile des Laserfeldes liefern zwar ein adiabatisch veränderliches Potential und erfüllen somit zumindest die erste Voraussetzung für Paarerzeugung. Dennoch findet keine Paarerzeugung statt: Die Potentiale konstanter Magnetfelder ohne elektrisches Potential weisen keine Energiebrücke auf, und wie sich zeigen lässt, gilt Gleiches für die Potentiale von Magnetfeldern mit veränderlicher Stärke, aber festgelegter Richtung. Oder exakter, nachdem oben die Verwendung des Konzeptes von Feldern kritisiert wurde: *“a gap-bridge does not exist for the Dirac equation without electric potential ( $A_0 = 0$  in Coulomb gauge)”*<sup>82</sup> Da die Energiebrücke jedoch notwendige Voraussetzung für adiabatische Paarerzeugung ist, gelangt man zur Schlussfolgerung, dass adiabatische Paarerzeugung in Laserfeldern nicht möglich ist.

### 4.3 Kombination von Laser- und Coulomb-Feld

Die beiden bisher gemachten Vorschläge überzeugen jeweils für sich genommen nicht. Aus einer Kombination beider Vorschläge ergibt sich eine dritte, realistischere Variante:<sup>83</sup> Wie gezeigt, liefern die Coulomb-Felder schwerer Ionen gebundene Zustände in der Energielücke. Magnetfelder können ein adiabatisch veränderliches Potential beisteuern. Eine Kombination von beiden erscheint ideal: Der Vorschlag lautet, schwere Ionen im Fokus eines starken Lasers zu positionieren.

Die Idee ist nicht gänzlich neu: Die ersten Rechnungen zu Kombinationen von Coulomb-Feld und (zeitlich konstantem) externen Magnetfeld stammen von Schlüter im Jahr 1985.<sup>84</sup> Schlüter erläutert auch anschaulich, wie man sich das Wechselspiel zwischen Coulomb-Feld und Magnetfeld vorstellen kann. Zum Zwecke der Anschaulichkeit wird die Situation zunächst anhand eines mit Elektronen besetzten Zustandes verdeutlicht, obwohl aus 4.1 bekannt ist, dass für Paarerzeugung

<sup>82</sup>[27], S. 5.

<sup>83</sup>Siehe [27].

<sup>84</sup>Siehe [36].

der 1s-Zustand unbesetzt sein muss. Man nehme ein Magnetfeld an, das konstante Richtung besitze (z.B. entlang der z-Achse). Entlang dieser Achse ist die Bewegung der Elektronen frei, da keine Kraft auf Teilchen mit Bewegungsrichtung parallel zum Magnetfeld wirkt. Wenn sie eine nicht-verschwindende radiale Geschwindigkeitskomponente besitzen, führen die Teilchen eine Schraubenbewegung (Gyration) um die Magnetfeldachse durch. Im Coulomb-Feld existieren gebundene Zustände, die die Elektronenbewegung auch in z-Richtung einschränken. Je stärker das Magnetfeld wird, desto kleiner wird der Gyrationen-Radius, d.h. die Elektronen werden immer näher am Kern lokalisiert. Die Energie der gebundenen Zustände nimmt zu und erreicht bei einer kritischen Stärke des Magnetfelds die für Paarerzeugung entscheidende Schwelle  $E = 2m$  (siehe Abb. 4). Ist der Zustand *unbesetzt*, tritt Paarerzeugung auf. Mit der Heisenbergschen Unschärferelation  $\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$  und  $\Delta p \sim mc$  für Paarerzeugung kann grob abgeschätzt werden, dass bei Einsetzen der Paarerzeugung der Gyroradius in der Größenordnung einer Compton-Wellenlänge liegen muss.

In einem Laserfeld oszilliert die Magnetfeldstärke und erreicht zweimal pro Schwingungsperiode den kritischen Wert für Paarerzeugung, da die Richtung des Magnetfeldes irrelevant ist. Die benötigten Laserfelder sind jedoch noch immer äußerst stark und liegen z.B. für Uranatome in der Größenordnung von  $B_{cr} \sim 100E_{cr}$ . X-Ray Free-Electron Laser, die in naher Zukunft möglicherweise ausreichend starke Laserfelder erzeugen könnten, besitzen Wellenlängen der Größenordnung 0,05 - 6 nm.<sup>85</sup> Es könnten somit ca.  $10^{18}$  Paare pro Sekunde erzeugt werden – eine Beobachtung scheint realistisch. Zumindest ist zu hoffen, dass der abrupte Übergang zwischen unterkritischem Fall – keine Paarerzeugung – und überkritischem Fall –  $10^{18}$  Paare pro Sekunde – beobachtbar sein könnte. Es bestehen somit gute Chancen, dass zukünftige Fortschritte in der Lasertechnologie die experimentelle Beobachtung von adiabatischer Paarerzeugung ermöglichen werden.

---

<sup>85</sup>Siehe [41].

# A Anhang

## A.1 Paarerzeugung in einem konstanten elektrischen Feld (Schwinger)

Schwinger<sup>86</sup> gab 1951 eine eichinvariante Lösung für die Paarerzeugung in einem starken, räumlich wie zeitlich konstantem elektrischen Feld (E-Feld) an. Dies darf nicht mit dem Ergebnis aus Abschnitt 2 verwechselt werden, laut dessen Paarerzeugung in einem konstanten externen Potential  $V$  nicht möglich sei - bei dieser Aussage handelt es sich um das  $A^\mu$ -Feld, nicht um ein E- /B-Feld.

Die Rechnung soll im Rahmen der Streutheorie kurz rekapituliert werden.<sup>87</sup> Zur Notation: Es werden die Dirac-Matrizen in kovarianter Form verwendet:

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^i = \beta\alpha^i \quad (68)$$

Der Zeitentwicklungsoperator, der die Gleichung  $i\frac{\partial}{\partial t}U(t_1, t_0) = V(t)U(t_1, t_0)$  erfüllen muss, kann mit dem Zeitordnungsoperator  $T$  formal bestimmt werden zu:

$$U(t, t_0) = T \exp\left(-i \int_{t_0}^t V(t') dt'\right) = T \exp\left(i \int_{t_0}^t \mathcal{L}_I(x') d^4x'\right) \quad (69)$$

$V$  ist hier das externe Feld des Hamiltonoperators  $H = H_0 + V$ ,  $\mathcal{L}_I(x)$  ist die zu  $V$  zugehörige Lagrange-Dichte am Raumzeitpunkt  $(t, \mathbf{x})$ . Die Lagrange-Dichte (ursprünglich von Euler und Heisenberg hergeleitet) für die Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld lautet:

$$\mathcal{L}_I(x) = -e\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) = -e j^\mu(x) A_\mu(x) \quad (70)$$

Mit der Definition aus Abschnitt 1.4 erhält man für die Streumatrix:

$$S = T \exp\left(-ie \int \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) d^4x\right) \quad (71)$$

Es wird insbesondere das Matrixelement  $S_0 = \langle\Omega|\mathcal{S}|\Omega\rangle$  benötigt, da die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung durch

$$p = 1 - |\langle\Omega|\mathcal{S}|\Omega\rangle|^2 \quad (72)$$

gegeben ist. Das Matrixelement hängt über die Beziehung

$$|S_0|^2 = \exp\left\{-\int w(x) d^4x\right\} \quad (73)$$

---

<sup>86</sup>Siehe [38].

<sup>87</sup>Die Herleitung folgt [17], Kapitel 4. Schwinger selbst arbeitet in seiner Originalarbeit von 1951 mit der sog. "proper time method" und bestimmt die Greens-Funktion des Feldes. In späteren, hier nicht herangezogenen Arbeiten (siehe z.B. Phys. Rev. 93, 615-628 (1953)) arbeitet er ebenfalls mit der S-Matrix.

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte für Paarerzeugung  $w(x)$  zusammen.  $S_0$  ergibt sich nach einiger Rechnung zu:

$$\ln(S_0) = \text{Tr} \ln \left\{ [P_\mu \gamma^\mu - eA_\mu(X) \gamma^\mu - m + i\epsilon] \frac{1}{P_\mu \gamma^\mu - m + i\epsilon} \right\} \quad (74)$$

wobei die verallgemeinerten Orts- und Impulsoperatoren  $X_\mu|x\rangle = x_\mu|x\rangle$  und  $\langle x|P_\mu|\alpha\rangle = i\partial_\mu\langle x|\alpha\rangle$  eingeführt wurden. Bei der imaginären Größe  $i\epsilon$  handelt es sich um einen Konvergenzfaktor. Durch Addition der Ladungskonjugierten von (74) zu (74) ergibt sich:

$$2 \ln(S_0) = \text{Tr} \ln \left\{ [(P_\mu \gamma^\mu - eA_\mu(X) \gamma^\mu)^2 - m^2 + i\epsilon] \frac{1}{P^2 - m^2 + i\epsilon} \right\} \quad (75)$$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte zu:

$$w(x) = \text{Re} \text{tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is(m^2 - i\epsilon)} \langle x | \exp \left\{ is \left[ (P - eA(x))^2 + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \right\} - \exp \{ is P^2 \} | x \rangle \quad (76)$$

mit  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$  und dem Feldstärketensor  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Bisher wurden noch keine Annahmen über das elektromagnetische Feld gemacht. Wird ein rein elektrisches Feld angenommen, das entlang der z-Achse ausgerichtet ist, kann das Integral über mehrere Zwischenschritte ausgewertet werden. Das orts- und zeitunabhängige Endergebnis für die Wahrscheinlichkeitsdichte lautet:

$$w(x) = \frac{\alpha E^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{|eE|}\right) \quad (77)$$

Paarerzeugung ist also exponentiell unterdrückt. Zwar ist das externe Feld, da es unendlich ausgedehnt ist, immer überkritisch, doch kann Paarerzeugung erst bei hohen E-Feldstärken realistischerweise beobachtet werden. Wird  $\hbar$  und  $c$  wieder eingeführt, kann man grob abschätzen, dass – wie bei der Rechnung von Sauter – ein Elektron über die Strecke einer Comptonwellenlänge potentielle Energie in der Größenordnung seiner Ruheenergie gewinnen muss, damit Paarerzeugung realistischerweise beobachtet werden kann – wieder liegen die geforderten Feldstärken weit über dem experimentell Erreichbaren.

## A.2 Skizze des rigorosen Beweises der adiabatischen Paarerzeugung<sup>88</sup>

Grundlegende Idee des rigorosen Beweises ist, mit den verallgemeinerten Eigenfunktionen die Entwicklung einer Wellenfunktion für statische, überkritische Potentiale zu kontrollieren. Die reale Zeitentwicklung kann durch die stationäre Hilfsentwicklung genähert werden und so die gesuchte Information über das Streuverhalten erhalten werden.

<sup>88</sup>Siehe für ganzen Abschnitt [24, 26].

**Stationäre Hilfsentwicklung** Wie in Abschnitt 3.2 wird die Hilfszeitentwicklung auf der *makroskopischen* Zeitskala  $s = \epsilon t$  betrachtet und die Zeit  $s$  bei einem Wert  $v$  festgehalten. Der zeitunabhängige Dirac-Operator  $D_{\mu(v)}$  erzeugt eine unitäre stationäre Hilfszeitentwicklung, die

$$i\partial_s V_{\mu(v)}(s, 0) = \frac{1}{\epsilon} D_{\mu(v)} V_{\mu(v)}(s, 0) \quad (78)$$

erfüllt. Angewendet auf die verallgemeinerten Eigenfunktionen ist die Zeitentwicklung identisch mit der bekannten dynamischen Phase:

$$V_{\mu(v)}(s, 0) \varphi_{\mu(v)}(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) = e^{-\frac{i}{\epsilon} E_k s} \varphi_{\mu(v)}(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) \quad (79)$$

Über die verallgemeinerte Fouriertransformation kann ein gebundener Zustand  $\Phi$  an der Kante des positiven Kontinuums als Entwicklung in verallgemeinerte Eigenfunktionen dargestellt werden, deren Zeitentwicklung nach (79) bekannt ist.

$$V_{\mu(v)}(s, 0) \Phi(\mathbf{x}, j) = \sum_{j=1}^4 \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\epsilon} E_k s} \varphi_{\mu(v)}(\mathbf{k}, j, \mathbf{x}) \mathcal{F}_{\mu(v)}(\Phi)(\mathbf{k}, j) d^3 k \quad (80)$$

Zur sauberen Beschreibung werden verschiedene  $k$ -Werte getrennt betrachtet: Kleine  $k$ -Werte, die ein langsames Streuverhalten aufweisen und (hoffentlich) nur mit vernachlässigbar kleiner Wahrscheinlichkeit auftauchen, und mittlere / große  $k$ -Werte, die ein schnelles Streuverhalten aufweisen. Zur Trennung wird ein Mollifier eingeführt:

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq 1 \\ 1 & \text{für } k \geq 2 \end{cases} \quad (81)$$

Es wird zudem für  $\kappa > 0$  definiert:

$$\hat{\rho}_\kappa(\mathbf{k}) = \hat{\rho}\left(\frac{\mathbf{k}}{\kappa}\right) \quad \text{und} \quad \rho_{\kappa, \mu(v)} = \mathcal{F}_{\mu(v)}^{-1} \hat{\rho}_\kappa \mathcal{F}_{\mu(v)} \quad (82)$$

Es kann ein für die weitere Beweisführung zentrales Korollar zur Propagation der Wellenfunktion bewiesen werden, welches drei Aussagen enthält:<sup>89</sup>

- Bestandteile der Wellenfunktion mit großen Impulsen, gegeben durch  $\rho_{\kappa, \mu(v)} \Phi$ , streuen rasch.
- Bestandteile der Wellenfunktion mit kleinen Impulsen, gegeben durch  $(1 - \rho_{\kappa, \mu(v)}) \Phi$ , sind stark unterdrückt. Das ist hilfreich, da die Anteile der Wellenfunktion mit kleinen Impulsen langsam streuen und das vollständige Streuen der Wellenfunktion verhindern könnten. Kleine Impulse treten mit höherer Wahrscheinlichkeit auf, je näher  $v$  an 0 ist. Dies ist der “gefährliche” Bereich bei Betrachtung des Streuprozesses.

<sup>89</sup>Siehe Abschnitt 5, insbes. Korollar 5.2, und Korollar 7.2 in [26].

- Für das Streuverhalten der gesamten Wellenfunktion gilt die Abschätzung

$$\|\mathbb{I}_{\mathcal{S}} V_{\mu(v)}(s, 0) \Phi\| \leq C v^{-1/2} \epsilon^{3/2(1-\xi)} u^{-3/2(1-\xi)} (\|\Phi\| + \|D_{\mu(v)} \Phi\|)$$

mit  $0 < \xi < 1$ . Im adiabatischen Limes verlässt der anfängliche Zustand  $\Phi$  den Bereich  $\mathcal{S}$  rasch. Die Streugeschwindigkeit nimmt ab, je näher  $v$  an 0 ist, da hier die kleinen Impulse Einfluss gewinnen.

Für die weitere Beschreibung werden zwei Bereiche getrennt, die sich durch die Wahl der Zeit  $v$ , zu der das Potential konstant gehalten wird, unterscheiden. Es wird eine makroskopische Zeit  $\sigma$  von der Ordnung 1 eingeführt, die ungefähr die Zeit angibt, nach deren Verstreichen die Wellenfunktion den Einflussbereich des Potentials vollständig verlassen hat. Für  $s \leq \sigma$  muss gezeigt werden, dass die Wellenfunktion  $\mathcal{S}_A$  verlässt, für  $s > \sigma$  sichergestellt werden, dass kein Anteil der Wellenfunktion wieder in den Einflussbereich zurückkehrt.

**Entwicklung für kurze Zeiten  $s \leq \sigma$**  Entscheidend ist eine Abschätzung über die Verweildauer der Wellenfunktion  $\psi_s^\epsilon$  im Einflussbereich  $\mathcal{S}_A \subset \mathcal{S}$  des Potentials für  $s \in (0, \sigma]$  für die echte Zeitentwicklung  $U^\epsilon(s, 0)$ . Eine solche Abschätzung ist gegeben durch:

$$\|\mathbb{I}_{\mathcal{S}} U^\epsilon(s, 0) \chi\| = \|\mathbb{I}_{\mathcal{S}} \psi_s^\epsilon\| \leq C(\epsilon^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi} s^{-\frac{3}{2}}) \quad (83)$$

Dabei soll  $0 < \xi < \frac{1}{3}$  sein und  $\sigma$  so gewählt werden, dass  $\partial_s \mu(s) > 0$  für  $s \in (0, \sigma]$  und beschränkt ist.

Die Abschätzung ergibt sich aus einem Vergleich von realer und die stationärer Zeitentwicklung. Nutzt man (78) und die Beziehungen  $i\partial_s U^\epsilon(s, s_0) = \frac{1}{\epsilon} D_{\mu(s)} U^\epsilon(s, s_0)$  und  $D_{\mu(s)} = D_0 + \mu(s)A$ , kann der Fehler bei der Annahme einer stationären Entwicklung geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} U^\epsilon(s, 0) - V_{\mu(v)}^\epsilon(s, 0) &= \int_0^s \partial_u (V_{\mu(v)}^\epsilon(s, u) U^\epsilon(u, 0)) \\ &= -\frac{i}{\epsilon} \int_0^s V_{\mu(v)}^\epsilon(s, u) (\mu(v) - \mu(u)) A U^\epsilon(u, 0) du \end{aligned} \quad (84)$$

Damit lässt sich der Fehler angeben, der bei Ersetzen der realen durch die stationäre Zeitentwicklung auftritt:

$$\psi_s^\epsilon = U^\epsilon(s, 0) \chi = V_{\mu(v)}^\epsilon(s, 0) \chi + \frac{i}{\epsilon} \int_0^s V_{\mu(v)}^\epsilon(s, u) (\mu(u) - \mu(v)) A \psi_u^\epsilon du \quad (85)$$

Dieser Fehler ist keineswegs klein - durch geschickte Wahl von  $v$  wird jedoch erreicht, dass der größte Teil des Fehlers gemeinsam mit der Wellenfunktion "streut" und den uns interessierenden Bereich  $\mathcal{S}_A$  verlässt. Es wird die Wahl  $v = s$  getroffen, d.h.  $v$  ist für unterschiedliche Entwicklungszeiten  $s$  variabel. Wieso ist dies eine gute Wahl? Für  $u \sim s$  ist  $\mu(s) - \mu(u)$  nahezu Null und das Integral führt nur zu einem kleinen Fehler. Für frühere Zeiten ist der Fehler nicht vernachlässigbar, da sich die  $\mu$ -Werte stark unterscheiden, aber die Wellenfunktion hatte viel Zeit zum Streuen - der Fehler verbleibt nicht in  $\mathcal{S}_A$ , er "läuft weg". Das Integral wird in zwei Teile aufgespalten:

$$\begin{aligned} \psi_s^\epsilon &= V_{\mu(v)}^\epsilon(s, 0) \chi + \frac{i}{\epsilon} \int_{s-\tilde{\sigma}}^s V_{\mu(v)}^\epsilon(s, u) (\mu(u) - \mu(v)) A \psi_u^\epsilon du \\ &\quad + \frac{i}{\epsilon} \int_0^{s-\tilde{\sigma}} V_{\mu(v)}^\epsilon(s, u) (\mu(u) - \mu(v)) A \psi_u^\epsilon du \end{aligned} \quad (86)$$

Mit dem genannten Korollar können die drei Terme in  $||\mathbb{I}_S \psi_s^\epsilon||$  abgeschätzt werden. Man erhält Aussage (83). Aus (83) ist ersichtlich, dass die Wellenfunktion bei Erreichen der vorher festgelegten Zeit  $\sigma$  den Einflussbereich des Potentials fast vollständig verlassen hat.

**Entwicklung für lange Zeiten  $s > \sigma$**  Zur Zeit  $s \approx \sigma$  hatte die Wellenfunktion  $\mathcal{S}_A$  bereits verlassen. Dies reicht jedoch nicht zum Nachweis des Streuens aus: Bei der vorigen Abschätzung wurde ein großer Fehler gemacht, der jedoch mit der Wellenfunktion den Bereich  $\mathcal{S}_A$  verließ. Es muss sichergestellt werden, dass dieser Fehler nicht zu irgendeiner Zeit “zurückkehrt”.

Unter gleichen Bedingungen wie für Zeiten  $s \leq \sigma$  erhält man auch hier eine Abschätzung für die Zeitentwicklung für  $s > \sigma$  ( $0 < \xi < \frac{1}{3}$ ):

$$||\mathbb{I}_S U^\epsilon(s, 0)\chi|| = ||\mathbb{I}_S \psi_s^\epsilon|| \leq C \epsilon^{\frac{1}{12} - \frac{3}{4}\xi} \quad (87)$$

Die Beweisidee ist ähnlich wie zuvor: Die reale Zeitentwicklung wird mit einer stationären Hilfsentwicklung verglichen und der Fehler abgeschätzt. Anders als zuvor kann die Hilfsentwicklung zur konstanten Zeit  $v = \sigma$  ausgewertet werden, statt dies Zeit variabel mit  $v = s$  zu wählen, da der größte Teil der Wellenfunktion den Einflussbereich des Potentials verlassen hat, eine freie Entwicklung durchläuft und somit die weitere Veränderung des Potential nicht mehr “mitbekommt”.

Es wird eine neue Hilfszeitentwicklung definiert, die für  $0 < s \leq \sigma$  der realen, für  $s > \sigma$  der stationären Entwicklung entspricht:

$$\tilde{U}^\epsilon(s, 0) = \begin{cases} U^\epsilon(s, 0) & \text{für } s \leq \sigma \\ V_{\mu(\sigma)}^\epsilon & \text{für } s > \sigma \end{cases} \quad (88)$$

$\chi_s^\epsilon = \tilde{U}^\epsilon(s, 0)\chi$  ist der sich durch die Hilfszeitentwicklung ergebende Zustand, der für  $s \leq \sigma$  als  $\chi_s^\epsilon = \psi_s^\epsilon = U(s, 0)\chi$ , für  $s > \sigma$  als

$$\chi_s^\epsilon = V_{\mu(\sigma)}^\epsilon(s, 0)\chi + \frac{i}{\epsilon} \int_0^\sigma (\mu(v) - \mu(\sigma)) V_{\mu(\sigma)}^\epsilon(s, u) A \psi_u^\epsilon du$$

geschrieben werden kann. Wieder gibt es das Problem kleiner Impulse, die nur langsam streuen. Es wird die Wellenfunktion  $\tilde{\psi}_s^\epsilon$  eingeführt, bei der die kleinen Impulse “abgeschnitten” werden:<sup>90</sup>

$$\tilde{\psi}_s^\epsilon = V_{\mu(\sigma)}^\epsilon(s, 0) \rho_{\kappa, \mu(\sigma)} \chi + \frac{i}{\epsilon} \int_0^{\sigma - \epsilon^{2/3}} (\mu(v) - \mu(\sigma)) V_{\mu(\sigma)}^\epsilon(s, u) \rho_{\kappa, \mu(\sigma)} A \psi_u^\epsilon du$$

Zwei Dinge lassen sich (vereinfacht fomuliert) feststellen:

- Die Ersetzung von  $\chi_s^\epsilon$  durch das leichter zu kontrollierende  $\tilde{\psi}_s^\epsilon$  führt im adiabatischen Limes nur zu einem vernachlässigbaren Fehler. Es gilt die Abschätzung  $||\chi_s^\epsilon - \tilde{\psi}_s^\epsilon|| \leq C \epsilon^{\frac{1}{12} - \frac{3}{4}\xi}$

<sup>90</sup>Die Wahl der Integralgrenzen ist für die weitere Beweisführung nötig, die hier jedoch nicht besprochen wird.

- $\tilde{\psi}_s^\epsilon$  streut für  $s > \sigma$  sowohl unter der Hilfszeitentwicklung als auch unter der realen Zeitentwicklung, d.h.  $\|\mathbb{I}_S \tilde{U}^\epsilon(s, \sigma) \tilde{\psi}_\sigma^\epsilon\| = \|\mathbb{I}_S \tilde{\psi}_s^\epsilon\|$  und  $\|\mathbb{I}_S U^\epsilon(s, \sigma) \tilde{\psi}_\sigma^\epsilon\|$  gehen im adiabatischen Limes gegen Null.

Nun muss die Brücke zur echten Zeitentwicklung des gebundenen Zustands  $\chi$  geschlagen werden. Die relevante Größe  $\|\mathbb{I}_S U^\epsilon(s, 0) \chi\|$  kann unter Verwendung von  $\chi_\sigma^\epsilon = U^\epsilon(\sigma, 0) \chi$  und der Dreiecksungleichung zu  $\|\mathbb{I}_S U^\epsilon(s, 0) \chi\| \leq \|\tilde{\psi}_\sigma^\epsilon - \chi_\sigma^\epsilon\| + \|\mathbb{I}_S U^\epsilon(s, \sigma) \tilde{\psi}_\sigma^\epsilon\|$  abgeschätzt werden. Die beiden Glieder der Abschätzung stellen gerade die beiden oben getroffenen Aussagen dar - auch  $\chi$  wird demzufolge streuen. Damit ist die Aussage des zentralen Theorems gezeigt.

## Literatur

- [1] F. Beck, H. Steinwedel und G. Süssmann: Bemerkungen zum Kleinschen Paradoxon, *Z. Phys.* *171*, 189–198 (1963).
- [2] J. D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistische Quantenmechanik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin (1998).
- [3] E. Brezin, C. Itzykson: Pair Production in Vacuum by an Alternating Field, *Phys. Rev. D*, *2*, 1191–1199 (1970).
- [4] P. A. M. Dirac: A Theory of Electrons and Protons, *Proc. R. Soc. Lond. A* *126*, 360–365 (1930)
- [5] P. A. M. Dirac: Quantised Singularities in the Electromagnetic Field, *Proc. R. Soc. Lond. A* *133*, 60–72 (1931)
- [6] P. A. M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford (1988).
- [7] D. Dürr, S. Teufel: *Bohmian Mechanics*, Springer, Berlin u.a. (2009).
- [8] D. Dürr: An Unbeliever's View on QED On Dirac's first and second class difficulties, *Vortragsfolien* (2010).
- [9] D. Dürr, R. Grummt, M. Kolb: On the Time-Dependent Analysis of Gamow Decay, *Eur. J. Phys* *32* (2011).
- [10] S. S. Gershtein, Y. Zeldovich: Positron Production During the Mutual Approach of Heavy Nuclei and the Polarization of the Vacuum, *Sov. Phys. JETP* *30*, 358–361 (1970).
- [11] W. Greiner: Quantum electrodynamics of strong fields, *Hadrons and Heavy Ions Lecture Notes in Physics* *231*, 95–226 (1985).
- [12] W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski: *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer, Berlin u.a. (1985).
- [13] W. Greiner: *Relativistische Quantenmechanik, Wellengleichungen*, Verlag Harri Deutsch, Thun u.a. (1987).
- [14] W. Greiner, J. Reinhardt: *Feldquantisierung*, Verlag Harri Deutsch, Thun u.a. (1993).
- [15] H. Heisenberg, H. Euler: Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons, *Z. Phys.* *98*, 714–732 (1936)
- [16] F. Hund: Materieerzeugung im anschaulichen und im gequantelten Wellenbild der Materie, *Z. Phys.* *117*, 1–17 (1941).

- [17] C. Itzykson, J.-B. Zuber: Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York u.a. (1987).
- [18] O. Klein: Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac, *Z. Phys.* *53*, 157–165 (1929).
- [19] D. Lazarovici: The Geometric Phase in Quantum Electrodynamics, Diplomarbeit an der LMU München (2011).
- [20] G. Nenciu: On the Adiabatic Limit for Dirac particles in External Fields, *Commun. Math. Phys.* *76*, 117–128 (1980).
- [21] G. Nenciu: Existence of the Spontaneous Pair Creation in the External Field Approximation of Q.E.D., *Commun. Math. Phys.* *109*, 303–312 (1987).
- [22] R. F. O’Connell: Effect of the anomalous magnetic moment of the electron on spontaneous pair production in a strong magnetic field, *Phys. Rev. Lett.* *21*, 397–398 (1968).
- [23] J. R. Oppenheimer: On the Theory of Electrons and Protons, *Phys. Rev.* *35*, 562–563 (1930).
- [24] P. Pickl: Existence of Spontaneous Pair Creation, Dissertation an der LMU München (2005).
- [25] P. Pickl: Generalized eigenfunctions for Dirac operators near criticality, *J. Math. Phys.* *48*, 123505 (2007).
- [26] P. Pickl, D. Dürr: On Adiabatic Pair Creation, *Commun. Math. Phys.* *282*, 161–198 (2008).
- [27] P. Pickl, D. Dürr: Adiabatic Pair Creation in Heavy Ion and Laser Fields, *Eur. Phys. Letters* *81*, 40001 (2008).
- [28] P. Pickl, D. Dürr: Spontaneous Pair Creation revisited, [arXiv:quant-ph/0602152v1](https://arxiv.org/abs/0602152v1) (2008).
- [29] V. S. Popov: Positron Production in a Coulomb Field with  $Z > 137$ , *Sov. Phys. JETP* *32*, 526–535 (1971).
- [30] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, San Diego (1980).
- [31] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York (1975).
- [32] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Academic Press, New York (1978).
- [33] J. J. Sakurai: *Advanced Quantum Mechanics*, Addison Wesley, Reading, Mass., u.a. (1999).

- [34] F. Sauter, Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs, *Z. Phys.* *69*, 742–764 (1931).
- [35] F. Sauter: Zum “Kleinschen Paradoxon”, *Z. Phys.* *73*, 547–552 (1932).
- [36] P. Schlüter et al.: Bound electrons in critical magnetic fields, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* *18*, 1685–1700 (1985).
- [37] F. Schwabl: *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*, Springer, Berlin u.a. (2008).
- [38] J. Schwinger: On Gauge Invariance and Vacuum Polarization, *Phys. Rev.* *82*, 664–679 (1951).
- [39] S. Teufel: *Adiabatic Perturbation Theory in Quantum Dynamics*, Springer, Berlin u.a. (2003)
- [40] B. Thaller: *The Dirac Equation*, Springer, Berlin u.a. (2010).
- [41] o.A.: European XFEL Facts & Figures, [http://www.xfel.eu/overview/facts\\_and\\_figures/](http://www.xfel.eu/overview/facts_and_figures/) (Abgerufen am 4.5.2013)

## Abbildungsverzeichnis

1	Kleinsches Paradoxon: Verschiebung der Energiekontinua im Fall $V_0 > E + m$ . . . . .	10
2	Adiabatische Paarerzeugung im Dirac–See-Bild: Es existieren gebundene Zustände in der Energielücke. Erreicht die Eigenwertkurve das pos. Kontinuum (überkritischer Fall), streut der Zustand dort und der zurückkehrende gebundene Zustand ist leer. . . . .	14
3	Bei zunehmender Kernladung nimmt die Bindungsenergie der Elektronen zu. Taucht ein unbesetzter 1s-Zustand bei $Z_{cr} \sim 173$ in das negative Kontinuum ein, kommt es zur Paarerzeugung. Quelle: [12], S. 5. . . . .	31
4	Energie der gebundenen Zustände der 1s-Elektronen mit externem Magnetfeld ( $m = 1$ ). $eB = 1 \triangleq 4.41405 \times 10^{13}G$ . Quelle: [36], S. 1694. . . . .	33

## **Danksagung**

Ich möchte mich bei Prof. Dr. Detlef Dürr herzlich für die ausgezeichnete und intensive Betreuung bedanken. Ein weiterer Dank ergeht an Prof. Dr. Erwin Frey, der die Betreuung der Bachelorarbeit gemeinsam mit Prof. Dürr übernahm, sowie an Prof. Dr. Peter Pickl, der mich zuerst auf das Thema der Arbeit aufmerksam machte und sich ebenfalls immer Zeit für meine Fragen nahm.

## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe.

München, den 29. Mai 2013

-----  
Franziska Beck