MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2011/2012

Blatt 9 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1: Zeigen Sie den Gaußschen Mittelwertsatz: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz (d.h. überall komplex differenzierbar). Dann gilt für alle $r \geq 0$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}\phi}) d\phi \,.$$

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz mit $|f(z)| \leq C|z|^\alpha$ für alle $|z| \geq R$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ und $C, R > 0$. Zeigen Sie: f ist ein Polynom höchstens $\lfloor \alpha \rfloor$-ten Grades, wobei die Gaußklammer $\lfloor \alpha \rfloor$ von α die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich α ist.

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und nicht konstant. Beweisen Sie, dass dann $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt, d.h. dass es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $|f(z) - w| < \epsilon$.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie Liouvilles Satz auf eine geeignete Funktion anwenden.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Potenzreihe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$. Diese konvergiere für ein $z_1 \neq 0$.

(a) Sei $r \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass $f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r < |z_1|$ absolut und gleichmäßig konvergiert. *Hinweis*: Suchen Sie jeweils eine Majorante für die Summanden der Potenzreihe.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $f(z)$, also $R \in \mathbb{R}^+$ mit
$R = \sup\{r \in \mathbb{R} : f(z) \text{ konvergent für } |z| < r\}$. *Hinweis*: Finden Sie eine geschickte Abschätzung für die Summanden der Potenzreihe um letztere mit der geometrischen Reihe zu vergleichen.

(c) Betrachten Sie nun die Potenzreihe $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $|a|, |b| \leq r < R$. Es bezeichne $f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b f_N(x)dx,$$

also, dass Sie in diesem Fall Integration und Limesbildung vertauschen können.