MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2011/2012

Blatt 8 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1: Zeigen Sie: $\mathbb{C}$ ist vollständig.

Aufgabe 2: Überprüfen Sie folgende Funktionen auf komplexe Differenzierbarkeit:

(a) $f(z) = \exp \overline{z}$

(b) $f(z) = (\mathrm{Re}z)^3(\mathrm{Im}z)^2 + \mathrm{i}(\mathrm{Re}z)^2(\mathrm{Im}z)^3$

(c) $f(z) = 1/z\,, \quad z \neq 0$

Aufgabe 3: Es sei $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x,y) = y^2 - x^2$. Finden Sie eine Funktion $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $f(z) := f_1(x,y) + \mathrm{i}f_2(x,y)\,,\ z = x + \mathrm{i}y$ komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 4: Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, f(z) := \exp z$.

(a) Sei $\epsilon \in (0,\pi),\ a \in \mathbb{R}$. Zeichnen Sie das Bild $f(Q)$ für

$$Q := \{x + \mathrm{iy} \mid \mathrm{a} - \epsilon \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{a} + \epsilon,\ -\epsilon \leq \mathrm{y} \leq \epsilon\}\,.$$

(b) Berechnen Sie das Verhältnis der Flächen $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{|f(Q)|}{|Q|}$. Warum war dieses Ergebnis zu erwarten?

Aufgabe 5: Es sei $f(z) = 1/z\,,\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Auf welche Kurven bildet f Kreise mit Mittelpunkt im Nullpunkt, und auf welche bildet sie Nullpunktsgeraden ab? Wie verändert sich der Winkel zwischen zwei Nullpunktsgeraden? Wie verändert sich der Winkel zwischen zwei beliebigen Geraden?

Aufgabe 6:

(a) Zeigen Sie: $\exp : U \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist bijektiv, wobei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (-\pi,\pi]\}$.

(b) Es sei log die zu $\exp|_U$ gehörige Umkehrfunktion. Diese ist, analog zum reellen Fall, komplex differenzierbar. Man gebe $\log'(z)$ an.

(c) Sei für $\varphi \in (-\pi,\pi]$ und $0 \neq z = r\exp i\varphi$ das „Argument von z“ $\arg(z) := \varphi$. Zeigen Sie: $\log zw = \log z + \log w + i(2\pi, 0, -2\pi)$, falls $\arg(z) + \arg(w) \in ((-2\pi,-\pi], (-\pi,\pi], (\pi,2\pi])$.

(d) Für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $a \in \mathbb{C}$ sei $z^a := \exp(a \log z)$. Berechnen Sie $(z^a)'$. Bestimmen Sie für $a = \mathrm{i} + 1$ den Wert (d.h. Real- und Imaginärteil) der Ableitung im Punkt $z = \mathrm{i}$.