MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2011/2012

Blatt 7 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1: Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2xz^3 \\ -2yz^3 \\ 3z^2 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{v}$ nicht als Gradient einer reellwertigen Funktion ausdrückbar ist.

(b) Finden Sie nun einen integrierenden Faktor für $\boldsymbol{v}$, also eine nullstellenfreie Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x, y, z) \neq 0\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, sodass $g\boldsymbol{v}$ Gradient einer reellwertigen Funktion ist.
Hinweis: Es genügt ein spezielles g zu finden, insbesondere muss dieses nicht von allen Variablen abhängen.

(c) Integrieren Sie $\boldsymbol{v}$ über die wie folgt parametrisierte Kurve $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\phi(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ 1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $a \neq b$. Wieso hätten Sie dieses Ergebnis erwarten können?

Aufgabe 2: Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$.
Integrieren Sie $\boldsymbol{u}$ über den Rand des Kreises mit Radius R im positiven Umlaufsinn durch explizite Berechnung von

$$\oint_{S^1(R)} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}$$

sowie durch Anwendung des Satzes von Stokes.

Aufgabe 3: Es sei $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r}\hat{e}_r + r\cos\theta\hat{e}_\theta$ in gewöhnlichen Kugelkoordinaten des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ über $S^2(R)$, die 2-Sphäre mit Radius $R > 0$, durch explizite Berechnung von

$$\int_{S^2(R)} \boldsymbol{f} \cdot d\Sigma$$

und unter Verwendung des Gaußschen Satzes.

Aufgabe 4: Sei $\underline{J} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(t, \vec{x}) \mapsto \underline{J}(\vec{x}, t)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das einen Strom mit den Komponenten $\underline{J} = (j^0, \vec{j}) = (\rho, \rho\vec{v})$ repräsentiert. Hierbei ist $\vec{v} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld, entlang dem die Massen- (oder Wahrscheinlichkeits-) Dichte $\rho : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ propagiert.

(a) Sei F eine 3-dimensionale Hyperfläche und $\underline{\Phi} : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine Parametrisierung von F. Dann ist mit dem gerichteten Flächenelement $d\underline{\Sigma}$

$$\int\limits_F \underline{J} \cdot d\underline{\Sigma} = \int\limits_G \det(\underline{J}, \partial_u\underline{\Phi}, \partial_v\underline{\Phi}, \partial_w\underline{\Phi}) dudvdw.$$

Zeigen Sie:
(i) Wird $\underline{J}$ gegen eine $(t = t_0)$-Hyperfläche (z.B. $t = t_0,\ |x_k| \leq 1,\ , k = 1, 2, 3$) integriert, ergibt dies das Volumenintegral über die Nullkomponente $j^0 = \rho$ von $\underline{J}$.
(ii) Wird $\underline{J}$ gegen ein Zeitintervall $\times$ 2-dimensionale Raumfläche (z.B. $0 \leq t \leq T,\ x_1 = a,\ x_2^2 + x_2^2 \leq 1$) integriert, erhält man $\underline{J} \cdot d\underline{\Sigma} = \det(\vec{j}, \partial_u\vec{\phi}, \partial_v\vec{\phi}) dudvdt$, wobei $\vec{\phi}(u, v)$ eine Parametrisierung der 2-dimensionalen Raumfläche ist.

(b) In der Quantenmechanik wird ein Teilchen durch eine Wellenfunktion $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ beschrieben, die der *Schrödingergleichung* (alle Dimensionskonstanten ignoriert)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2}\triangle\psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t)$$

genügt. Hierbei ist V eine reelle Funktion. Sei ψ^* zu ψ konjugiert komplex. Man zeige: $\underline{J} = (\psi^*\psi, \mathrm{Im}(\psi^*\nabla\psi))$ ist divergenzfrei, d.h. $\underline{J}$ erfüllt die Kontinuitätsgleichung $div\underline{J} = \sum_{\alpha=0}^{3} \partial_\alpha J^\alpha = 0$. Warum erlaubt dies die Interpretation von $j^0 = \psi^*\psi$ als Wahrscheinlichkeitsdichte?
Hinweis: Man schreibe die Schrödingergleichung für ψ^*, berechne die Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)$ und erkenne darin die Dreier-Divergenz von $\mathrm{Im}(\psi^*\nabla\psi)$.

(c) Für $\delta \in \mathbb{R}_+$ sei

$$\psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{2\delta}{\pi(2\delta + it)^2}\right)^{3/4} e^{-\frac{\vec{x}^2}{2(2\delta+it)}}\ .$$

Man verifiziere, dass dies eine Lösung der Schrödingergleichung für $V = 0$ ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen auf der $(t = 0)$-Fläche mit $|x_k| \leq \sqrt{\delta},\ k = 1, 2, 3$ vorzufinden? Man prüfe, dass die Wahrscheinlichkeit eins ist, wenn die $(t = 0)$-Fläche der ganze $\mathbb{R}^3$ ist.

(d) Sei $F = S^2(R)$ die Kugeloberfläche mit Radius $R \gg \sqrt{\delta}$ im physikalischen Raum, die um den Nullpunkt zentriert ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen in der Zeit $[0, \infty]$ durch die Kugeloberfläche tritt?
Hinweis: Für allgemeine Flächen ist $\int_F \underline{J} \cdot d\underline{\Sigma}$ der Erwartungswert der Anzahl von (signierten, d.h. mit Vorzeichen je nach Richtung) Durchstoßungen von Stromlinien durch F. Wenn jede Stromlinie die Fläche nur einmal durchkreuzt, ist dies gleich der Durchkreuzungswahrscheinlichkeit.