MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2011/2012

Blatt 6 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1: Sei $f : [0, a] \to \mathbb{R},\ a > 0$ einmal stetig differenzierbar und positiv. Skizzieren Sie den Körper, der durch die Rotation von graph(f) um die x-Achse entsteht. Verifizieren Sie den zweiten Satz von Pappus, nämlich dass der Inhalt der Manteloberfläche MF dieses Körpers durch

$$|\mathrm{MF}| = 2\pi r_s\, L(K)$$

gegeben ist. Hierbei ist $L(K)$ die Länge und $r_s = \frac{1}{L(K)} \int_{\mathrm{graph}(f)} f ds$ der Schwerpunktradius von graph(f). Geben Sie dazu jeweils eine Parametrisierung von MF und graph(f) an. Zeichnen Sie r_s in Ihrer Skizze ein.

Aufgabe 2: Es sei $f : B^{(3)}(1) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$, wobei $B^{(3)}(1)$ die dreidimensionale Kugel mit Radius 1 ist. Φ sei eine Parametrisierung des Graphen von f. Berechnen Sie zunächst $\det(\Phi'^T \Phi')$ (Φ' ist die Jacobi-Matrix von Φ) allgemein und anschließend unter Benutzung Ihres Ergebnisses das Volumen des Graphen von f. Was haben Sie hiermit bestimmt?

Aufgabe 3: Zeigen Sie: Wenn ein ideales Gas (nur kinetische Energie) aus n Teilchen auf der Energiefläche E im Phasenraum gleichverteilt ist, dann hat bei großer Teilchenzahl mit $\frac{E}{n} = const.$ ein einzelnes Gasmolekül eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(a) Berechnen Sie die Jacobi Determinante für die Koordinatentransformation zu n-dimensionalen Kugelkoordinaten. Diese sind gegeben durch $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(r, \phi, \theta_1, \ldots \theta_{n-2})$ mit

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\phi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{n-2}\\
x_2 &= r\sin\phi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{n-2}\\
x_3 &= r\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{n-2}\\
x_4 &= r\cos\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{n-2}\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= r\cos\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2}\\
x_n &= r\cos\theta_{n-2}
\end{aligned}$$

wobei $(r, \phi, \theta_1, \ldots \theta_{n-2}) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)^{n-2}$.

(b) Für $R > 0$ sei $S^{n-1}(R) = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = R\}$, also die $(n-1)$-dimensionale Kugeloberfläche mit Radius R. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-R \leq a < b \leq R$ sei weiterhin $S_{a,b}^{n-1}(R) = \{\boldsymbol{x} \in S^{n-1}(R) : x_n \in [a, b]\}$. Benutzen Sie n-dimensionale Kugelkoordinaten um $S_{a,b}^{n-1}(R)$ zu parametrisieren und zeigen Sie, dass

$$|S_{a,b}^{n-1}(R)| = R^{n-1}|S_{\frac{a}{R},\frac{b}{R}}^{n-1}(1)| \quad \text{und} \quad |S_{a,b}^{n-1}(1)| = |S^{n-2}(1)| \int_a^b (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dx$$

($|A|$ bezeichnet den Flächeninhalt von A). Für letzteres benötigen Sie unter anderem die Substitution $x = \cos\theta_{n-2}$.

(c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 2 (a) von Blatt 5 um zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{|S^{n-1}(1)|}{|S^{n-2}(1)|} = \sqrt{2\pi}.$$

(Denken Sie an die Stirling-Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für große n.)

(d) Berechnen Sie nun für $R = \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S_{a,b}^{n-1}(R)|}{|S^{n-1}(R)|}.$$

(Limes und Integration können hier ohne Begründung vertauscht werden. Die Begründung ist Lebesgue dominierte Konvergenz.)

Aufgabe 4: Man führe folgende Wege stetig ineinander über, d.h. man finde eine Homotopie, die

(a) die Wege $\xi_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \to \xi_0(t) := a\cos t + \mathrm{i}b\sin t,\ a, b > 0$ und $\xi_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \to \xi_1(t) := \cos t + \mathrm{i}\sin t$ stetig ineinander über führt, also eine stetige Abbildung $\Omega : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\Omega(0, t) = \xi_0(t)$ und $\Omega(1, t) = \xi_1(t)$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Skizzieren Sie die Überführung.

(b) die Wege γ_1 und γ_2 aus Aufgabe 4) Blatt 5 stetig ineinander über führt.