MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2011/2012

Blatt 5 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie das 1-dimensionale Gaußintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

für $\alpha > 0$.

(b) Sei $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ symmetrisch und positiv definit (d.h. alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A sind positiv). Es bezeichne $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Weiter sei $\boldsymbol{x}^T = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}} d^n\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{y}^T D \boldsymbol{y}} d^n\boldsymbol{y} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\,.$$

(c) Berechnen Sie nun die zur obigen Gaußverteilung gehörende Kovarianzmatrix. Die Einträge der Kovarianzmatrix sind definiert als

$$C_{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j e^{-\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}} d^n\boldsymbol{x}.$$

Stellen Sie eine Verbindung zwischen der Matrix A und der Kovarianzmatrix her. Hinweis: Erinnern Sie sich an die Formel zur Bestimmung des Inversen einer Matrix über die Entwicklung von Determinanten.

(d) Wenn wir die Gaußverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung verstehen, was bedeutet dann die Diagonalisierung der Matrix A anschaulich für die zugehörigen Zufallsvariablen?

Aufgabe 2: Betrachten Sie den mit n-dimensionalen Kugelkoordinaten versehenen $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre $S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = 1\}$.
Anleitung: Berechnen Sie das n-dimensionale Gaußintegral einmal durch Faktorisierung in n einzelne Integrale und einmal durch eine Parametrisierung in n-dimensionalen Kugelkoordinaten. *Hinweise*: Dazu müssen Sie die explizite Form der n-dimensionalen Kugelkoordinaten nicht kennen. Die Gammafunktion ist gegeben als $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Die Gammafunktion stellt eine Extrapolation der Fakultät dar. Es gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$ und $\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)!}{n! 4^n}\sqrt{\pi}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass das Volumen der n-dimensionalen Kugel für große n fast vollständig am Rand sitzt. Berechnen Sie also das Verhältnis des Volumens einer Kugelschale zwischen den Radien a und b ($a > b$), und der Kugel mit Radius a.

Aufgabe 3: Die Länge einer Kurve K ist definierbar als

$$L(K) = \int_I \sqrt{|\underline{\Phi}'(t)|^2}dt\,,$$

wobei $\underline{\Phi} : I \subset \mathbb{R} \to K$ ein die Kurve einfach durchlaufender Weg ist.
Sei $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - \frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}}$.

(a) Man berechne die Länge des Graphen von f.

(b) Finden Sie nun $s : [0,1] \to [0, L(K)]$ so, dass $\underline{\lambda}(q) = \underline{\Phi} \circ s^{-1}(q)$, mit $\underline{\Phi}$ wie in Teil (a), die Parametrisierung ist, die die Kurve mit Geschwindigkeit 1 durchläuft. (Analog der Eigenzeit in der relativistischen Physik.)

Aufgabe 4: Seien ϕ, θ die üblichen Koordinaten auf der Sphäre. Berechnen Sie explizit das Wegintegral eines Vektorfelds $\boldsymbol{f}$ über den Weg γ

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s},$$

indem Sie eine detaillierte Parametrisierung der Wege angeben und veranschaulichen Sie sich jeweils deren Verlauf:

(a) für das Vektorfeld $\boldsymbol{f}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 3z^2 \end{pmatrix}$ über den Weg γ_1 entlang des Längenkreises bei $\phi = \frac{\pi}{2}$ vom Nord- zum Südpol der Einheitsphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sowie entlang eines Weges γ_2 auf der Einheitssphäre, für den in Kugelkoordinaten gilt $\phi = \theta \in [0, \pi]$.

(b) für das Vektorfeld $\boldsymbol{f}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ x+y \end{pmatrix}$ entlang der Wege γ_1 und γ_2 aus Teil a).

(c) Hätten Sie diese Ergebnisse auch ohne explizite Berechnung des Wegintegrals erhalten können?