MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WS 2011/2012

Blatt 4 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1: Betrachten Sie die in den $\mathbb{R}^3$ eingebettete Einheits-Halbsphäre H_2, also die Oberfläche der Halbkugel mit Radius 1. Der $\mathbb{R}^3$ sei mit kartesischen Koordianten (x, y, z) versehen. Der Mittelpunkt der Kugel liege im Punkt $(0, 0, 0)$, der (Nord-)Pol im Punkt $(0, 0, 1)$.

(a) Parametrisieren Sie H_2 durch die Koordinaten x, y.

(b) Führen Sie nun eine stereographische Projektion Φ der Punkte der Halbsphäre auf die Äquatorialebene $z = 0$ durch. Hierzu betrachten Sie die Gerade durch den Nordpol $(0, 0, 1)$ und durch einen weiteren Punkt p der Halbsphäre H_2. Diese schneidet auch die Ebene $z = 0$ in einem Punkt. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der $z = 0$ Ebene ist das Bild von p, $\Phi(p)$. Veranschaulichen Sie sich diese Abbildung. Wohin werden die Punkte auf H_2 abgebildet? Was passiert mit dem Nordpol $(0, 0, 1)$?

(c) Seien nun (ξ_1, ξ_2) die Koordinaten des Bildpunktes, also $\Phi(x, y, z(x, y)) = (\xi_1, \xi_2)$. Geben Sie für $z \neq 1$, also für alle Punkte auf H_2 außer dem Nordpol, $\Phi(x, y, z(x, y))$ explizit an.

(d) Finden Sie die Umkehrabbildung Φ^{-1}. Geben Sie nun das Bild der Koordinatenlinien $\xi_1 = \text{const.}$ sowie $\xi_2 = \text{const.}$ unter Φ^{-1} an. Worauf bildet Φ^{-1} also das orthogonale Koordinatennetz in der Äquatorialebene ab?

(e) Die Koordinaten ξ_1, ξ_2 sind für $1 \leq \xi_1^2 + \xi_2^2 < \infty$ ein Koordinatensystem von H_2 ohne den Nordpol. Bestimmen Sie das lokale 2-Bein in den ξ_1-ξ_2-Koordinaten ausgedrückt durch die kanonische Einheitsbasis des umgebenden $\mathbb{R}^3$, also die Tangentialvektoren an die Kurven $\Phi^{-1}(\xi_1 = \text{const}, \xi_2)$ und $\Phi^{-1}(\xi_1, \xi_2 = \text{const})$. Sind diese Vektoren überall orthogonal zueinander? Was können Sie aus Ihrem Ergebnis über die ξ_1-ξ_2-Koordinatenlinien auf H_2 schließen?

(f) Bestimmen Sie den Gradienten in den ξ_1-ξ_2-Koordinaten.

Aufgabe 2: Seien $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ und $f : V \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^5 - 16y^5$. Bestimmen Sie die stationären Punkte von f, sowie die zugehörigen Funktionswerte.

Aufgabe 3:

$$W_N := \frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_m!}$$

ist die Anzahl der Aufteilungen von N Teilchen auf m Kästen, wenn $\sum_{j=1}^m N_j = N$ gilt. Wenn den Kästen jeweils die Energie E_j zukommt, dann ist $\overline{E} := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^m E_j N_j$ die mittlere Energie pro Teilchen. Zeigen Sie, dass am Maximum von W_N unter den Nebenbedingungen $\sum_{j=1}^m N_j = N$ und $\sum_{j=1}^m E_j N_j = E$,

$$N_j = Ce^{-\lambda E_j} \tag{1}$$

gilt, für Konstanten C und λ, die durch die Nebenbedingungen bestimmt werden.

Hinweis: Da $N \gg m$ darf man annehmen, dass $N_j \gg 1$ für alle $j = 1, \dots, m$ und man darf näherungsweise die Sterlingformel $N_j! \approx \left(\frac{N_j}{e}\right)^{N_j}$ verwenden. Dadurch kann man die N_j als kontinuierliche Variablen behandeln. Minimieren Sie $\ln W_N$ statt W_N.

Bemerkung: Der Parameter λ in Formel (1) erhält durch den Zusammenhang mit der Thermodynamik eine physikalische Bedeutung und zwar $\lambda = \frac{1}{kT}$, k ist hier die Boltzmannkonstante, T die Temperatur.