

Blatt 3 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1: Betrachten Sie $\mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(n)$, die alternierenden n-Formen auf $\mathbb{R}^3$, für $n = 0, 1, 2, 3$.

(a) Begründen Sie mit Hilfe der Determinantenform $\det(\cdot, \cdot, \cdot)$, dass $\mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(0) \cong \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(3) \cong \mathbb{R}$ und $\mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(1) \cong \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(2) \cong \mathbb{R}^3$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(1)\,.$$

Schreiben Sie $\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x})$ als 1-Form mit Hilfe der Determinantenform, d.h. in der Basis

$$\{\det(\boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_3, \cdot),\, \det(\boldsymbol{e}_3,\, \boldsymbol{e}_1, \cdot),\, \det(\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2, \cdot)\}\,.$$

Lesen Sie grad als Anwendung von $d : \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(0) \to \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(1)$,

$$df = \mathrm{grad} f\,.$$

(c) Sei $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Betrachten Sie $\boldsymbol{g}$ als 1-Form und drücken Sie dies gemäß (b) aus. Wenden Sie $d : \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(1) \to \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(2)$ auf $\boldsymbol{g}$ an, wobei

$$d\left(a_{ij}(\boldsymbol{x}) \det(\boldsymbol{e}_i,\, \boldsymbol{e}_j, \cdot)\right) = \partial_i a_{ij}(\boldsymbol{x}) \det(\cdot,\, \boldsymbol{e}_j, \cdot) + \partial_j a_{ij}(\boldsymbol{x}) \det(\boldsymbol{e}_i, \cdot, \cdot)$$

gilt. Geben Sie den zu $d\boldsymbol{g}$ gehörigen Vektor an.

(d) Betrachten Sie $\boldsymbol{g}$ aus (c) diesmal als 2-Form und wenden Sie darauf $d : \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(2) \to \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}^3}(3)$ an, wobei

$$d\left(\sum_{i=1}^{3} a_i(\boldsymbol{x}) \det(\boldsymbol{e}_i, \cdot, \cdot)\right) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i a_i(\boldsymbol{x}) \det(\cdot, \cdot, \cdot)$$

gilt.

Aufgabe 2:

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gelte $f'(x) \neq 0 \; \forall x$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ injektiv ist.

(b) Sei nun $n \geq 2$ und $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Widerlegen Sie folgende Aussage durch ein geeignetes Gegenbeispiel:

$$\det(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})) \neq 0 \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \boldsymbol{f} \text{ ist injektiv.}$$

Aufgabe 3: Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie den mehrdimensionalen Mittelwertsatz. Das bedeutet, zeigen Sie, dass für je zwei Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$, deren Verbindungsstrecke $\overline{\boldsymbol{xy}}$ in D liegt, ein $\boldsymbol{z} \in \overline{\boldsymbol{xy}}$ existiert, sodass $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = \text{grad} f(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$.

Aufgabe 4: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}^n$ falls ein $L \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Gegeben sei nun die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 \cos x_2 \, e^{-x_3^2}$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist und dass $L \leq \sqrt{2}$ gewählt werden kann.