MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2011/2012

Blatt 14 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Informationen zur Klausur: Die Klausur findet am Mittwoch, den 15.2.2012, von 16:15 bis 18:15 Uhr statt. Finden Sie sich bitte 15 Minuten vor Klausurbeginn am Ihnen zugewiesenen Raum ein. Die Raumzuteilung finden Sie auf der Vorlesungshomepage. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bringen Sie bitte Ihren Studien- und Personalausweis (Führerschein o.Ä.) mit.

Aufgabe 1: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} .$$

Aufgabe 2: Es sei $L^2_{2\pi}([-\pi,\pi]) := \{f \in L^2([-\pi,\pi]) \mid f \text{ ist f. ü. } 2\pi\text{-periodisch}\}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f,g\rangle_\pi := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\lambda(dx)$. Dann bilden die Funktionen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_{2n}(x) := \cos(nx)$ und $f_{2n-1}(x) := \sin(nx)$ $(n = 1, 2, \dots)$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2_{2\pi}([-\pi,\pi])$.

(a) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) := |\sin x|$.

(b) Leiten Sie mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung und (a) die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$

her.

(c) Zeigen Sie, dass die Fourierreihe gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert.

Aufgabe 3: Zeigen Sie: Unter der Fouriertransformation verwandelt sich die Faltung in das gewöhnliche Produkt, d.h. es gilt:

$$\widehat{f \star g} = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}\widehat{g} ,$$

für alle $f, g \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ mit Werten in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4: Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\boldsymbol{x},t) = D\Delta p(\boldsymbol{x},t) \qquad , \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ D > 0$$

mit Hilfe der Fouriertransformation bzgl. $\boldsymbol{x}$ für die Anfangsbedingung

$$p(\boldsymbol{x}, 0) = \rho(\boldsymbol{x}) \in L_1(\mathbb{R}^3) \ ,$$

d.h. leiten Sie die Lösung

$$p(\boldsymbol{x}, t) = (4\pi D t)^{-3/2} \int e^{\frac{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4Dt}} \rho(\boldsymbol{y}) d^3 y$$

her.
Berechnen Sie die Lösung für $\rho(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}^2}$.
Bemerkung: Wählt man $D = -\frac{1}{2}i$ wird aus der Wärmeleitungsgleichung die freie Schrödingergleichung (Potential gleich Null). Somit haben Sie soeben auch die allgemeine Lösung der freien Schrödingergleichung bestimmt, die durch das Auftauchen von i allerdings ein vollkommen anderes Verhalten als die der Wärmeleitungsgleichung zeigt.