MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2011/2012

Blatt 13 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass $C[a,b]$, der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, vollständig bezüglich der Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ ist.

Aufgabe 2: Es sei $\mathbb{K}$ der Körper der komplexen oder reellen Zahlen. Beweisen Sie, dass $l^2 := \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty,\ x_k \in \mathbb{K},\ k \in \mathbb{N}\}$ mit der Norm $\|x\|_2 := (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ vollständig ist.

Aufgabe 3: Veranschaulichen Sie sich, dass die Forderung der Existenz einer majorisierenden, integrierbaren Funktion im Satz über die dominierte Konvergenz essentiell ist. Finden Sie hierzu eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen f_n, welche auf ganz $\mathbb{R}$ punktweise gegen Null konvergiert, jedoch nicht durch eine Lebesgue-integrierbare Funktion majorisiert wird und für die Sie Limesbildung und Integration nicht vertauschen können.

Aufgabe 4:

(a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Betrachten Sie die Faltung F_λ der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ mit der Familie der glättenden Funktionen (Mollifier)

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{N}\lambda e^{-\frac{1}{1-\lambda^2 x^2}} \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}]}(x) \ , \ N = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}\, dx,$$

also $F_\lambda(x) = (\mathbb{1}_{[a,b]} * f_\lambda)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) f_\lambda(x-y)dy$. Zeigen Sie, dass F_λ für $\lambda \to \infty$ in L^1 gegen $\mathbb{1}_{[a,b]}$ konvergiert.

(b) Ist $C[a,b]$ bezüglich der L^1-Norm vollständig?

Aufgabe 5: Wendet man das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Folge der Monome $(1, x, x^2, \ldots)$ in $L^2([-1,1])$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\lambda(dx)$ an, so erhält man die normierten Legendre-Polynome P_n, $n \in \mathbb{N}$. P_n ist ein Polynom n-ten Grades. Berechnen Sie mit diesem Verfahren P_n für $n = 0, 1, 2$ und skizzieren Sie die Polynome. Was bedeutet Orthogonalität von P_0 und P_1 graphisch?