MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WS 2011/2012

Blatt 11 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1: Basteln Sie sich geeignete Riemannsche Blätter (verklebte Blätter) zu $\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}$, um auf einem Blatt das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

zu berechnen.

Aufgabe 2: Sei $\lambda : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ ein additives Maß, d.h. $\lambda(M_1 \cup M_2) = \lambda(M_1) + \lambda(M_2)$ für alle $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(\Omega)$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Zeigen Sie: $M_1 \subset M_2 \Rightarrow \lambda(M_1) \leq \lambda(M_2)$.

Aufgabe 3: Beachten Sie im Folgenden, dass für $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\lambda([a, b]) = b - a$ und für messbare A_n, $\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n)$.

(a) Zeigen Sie: $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$.

(b) Sei $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ die Cantormenge, die durch sukzessive Wegnahme der "mittleren Drittel" entsteht. Zeigen Sie: $\mathcal{C}$ ist überabzählbar. (*Hinweis*: Stellen Sie $x \in [0, 1]$ im triadischen System dar. Wie sieht $\mathcal{C}$ dann aus?)
Zur Erinnerung: Die Cantormenge $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ ist $\mathcal{C} := \bigcap_{k=0}^\infty \mathcal{C}_k$, wobei $\mathcal{C}_k$ induktiv wie folgt definiert wird: $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$ und $\mathcal{C}_{k+1}$ entsteht aus $\mathcal{C}_k$ indem man $\mathcal{C}_k$ als disjunkte Vereinigung von 2^k Intervallen darstellt und aus jedem dieser Intervalle das offene mittlere Drittel entfernt.

(c) Zeigen Sie: $\lambda(\mathcal{C}) = 0$. *Hinweis*: Sie können ohne Beweis benutzen, dass $\lambda(\bigcap_{k=0}^\infty \mathcal{C}_k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(\mathcal{C}_k)$, wenn $\mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}_{k-1} \forall k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4: Konstruieren Sie die Vitalimenge. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Nehmen Sie das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ und identifizieren die Punkte 0 und 1. Äquivalent betrachten Sie $\mathbb{R} \mod 1$ (Sie erhalten einen "Kreis"). Die so konstruierte Menge heiße S. Führen Sie auf dieser Menge die folgende Äquivalenzrelation ein: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Betrachten Sie nun die Äquivalenzklassen A_x und zeigen Sie, dass $A_x \cap A_y = \emptyset$ für $x \nsim y$.

(b) Betrachten Sie die Familie aller Äquivalenzklassen A_x. Wählt man für jede Äquivalenzklasse A_x einen Vertreter, so bezeichne V die Menge dieser Vertreter. Zeigen Sie, dass

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \Big(V + q\Big) = S.$$

(c) Zeigen Sie weiter, dass V nicht messbar ist. *Hinweis:* Betrachten Sie das Maß von S und führen Sie einen Widerspruchsbeweis durch. Benutzen Sie dazu Teil b) und die σ-Additivität und Translationsinvarianz des Maßes.