MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2011/2012

Blatt 10 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Aufgabe 1: Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Laurentreihen und bestimmen Sie die Residuen.

(a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$

(b) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$

(c) $f(z) = \frac{\exp(z)-1}{z}$

Aufgabe 2: Sei $\alpha \geq 1$. Geben Sie den größten offenen Kreisring an, auf dem die Laurentreihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1+z)^n}{\alpha^n+1}$ konvergiert.

Aufgabe 3: Entwickeln Sie $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ in folgende Laurentreihen:

(a) Um $z_0 = 0$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(0,1)}(0)$;

(b) Um $z_0 = 0$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(1,2)}(0)$;

(c) Um $z_0 = 1$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(3,\infty)}(1)$.

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Hinweis: Was für eine Singularität ist $z = 0$? Verformen Sie den Integrationsweg zu einem, der die Null durch einen kleinen Halbkreis in der oberen Halbebene ausspart ($\rightarrow\!\frown\!\rightarrow$) und ersetzen Sie $\sin x$ mit Hilfe der Eulerformel. Berechnen Sie die beiden entstehenden Integrale jeweils durch geschicktes Schließen des Integrationswegs mit einem „unendlich großen“ Halbkreis. Achten Sie auf eine korrekte Argumentation, dass diese Halbkreise keinen Beitrag liefern.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx \, .$$

Achten Sie auf saubere Argumentation.

Aufgabe 5: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nur einfache Pole $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ hat. Dann nennt man

$$P \int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_a^{x_1-\epsilon} f(y)dy + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} f(y)dy + \ldots + \int_{x_n+\epsilon}^{b} f(y)dy \right)$$

den *Hauptwert* des Integrals der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$.

Betrachten Sie einen Weg von $-R$ bis R entlang der reellen Achse, wobei jeder Pol x_l mit einem Halbkreis $\overset{\curvearrowright}{x_l}$ in der oberen komplexen Halbebene umgangen wird. Schließen Sie den Weg durch einen Halbkreis vom Radius R in der oberen Halbebene. Die (endlich vielen) Pole von f in der oberen Halbebene seien $(z_j)_{j\in J}$ Zeigen Sie: Wenn das Integral über f über den Halbkreis im Limes $R \to \infty$ verschwindet, dann gilt

$$P \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{l\in J} \mathrm{res}(f, z_l) + i\pi \sum_{n\in I} \mathrm{res}(f, x_n)\,.$$