MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WS 2011/2012

Blatt 1 der Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in Ihrer Übungsgruppe ab.
Bitte melden Sie sich, wenn nicht schon geschehen, zu einer Übungsgruppe an.
Anmeldung, Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.math.lmu.de/~bohmmech/Teaching/MP3WS2011/

Aufgabe 1: Die p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ $(p \geq 1,\ n \in \mathbb{N})$ ist definiert durch

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+,\ \|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die p-Norm die Dreiecksungleichung erfüllt, d.h. dass für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p \ .$$

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst für $p = 1$.
Für $p > 1$ definiere man $z_k := |x_k + y_k|^{p-1}$ und zeige zunächst, dass $|x_k + y_k|^p \leq |x_k||z_k| + |y_k||z_k|$. Anschließend benutze man die Hölderungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q \ \text{ mit } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ ,$$

um $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{z}\|_q + \|\boldsymbol{y}\|_p \|\boldsymbol{z}\|_q$ zu erhalten.

Aufgabe 2: Für $p \geq 1$ betrachte man die p-Norm auf $\mathbb{R}^2$. Es sei $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

(a) Zeichnen Sie für $p = 1, 2, \infty$ jeweils den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$, d.h. die Menge $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\|_p = 1\}$.

(b) Zeigen Sie: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p$.

(c) Betrachten Sie den Ausdruck (1) für $0 < p < 1$: Veranschaulichen Sie zunächst graphisch für $p = 1/2$, dass die Dreiecksungleichung verletzt wird. Beweisen Sie dies anschließend für allgemeines $0 < p < 1$.

Aufgabe 3: Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf einem Vektorraum V heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten c_1, c_2 gibt mit

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_b \leq \|\boldsymbol{x}\|_a \leq c_2\|\boldsymbol{x}\|_b \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in V \, .$$

Zeigen Sie: Alle p-Normen auf $\mathbb{R}^n$ ($p \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$) sind äquivalent. Dies beinhaltet auch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.
Hinweis: Beginnen Sie mit dem Beweis der Äquivalenz von $\|\cdot\|_\infty$ und einer beliebigen anderen p-Norm.

Aufgabe 4:

(a) Betrachten Sie die Kurve $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $f'(t)$, sowie $f'(t) \cdot f(t)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

(b) Gegeben sei nun das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \, , \ v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} .$$

Zeichnen Sie v für $(x, y) \in [-5, 5] \times [-5, 5]$. Was ist der Zusammenhang mit Aufgabe (a) ?

Aufgabe 5:

(a) Skizzieren Sie die folgenden Flächen und geben Sie jeweils eine Parametrisierung der Fläche an:

(i) den Graphen der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$,

(ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3 \, , z \geq 0\}$,

(iii) die Oberfläche des Zylinders mit Höhe H und Radius R.

(b) Bestimmen Sie die Schnittkurve der Fläche aus Aufgabe (a) Teil (ii) mit der durch $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$ gegebenen Fläche. Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis graphisch.